P.Gnädig／G.Honyek／K.Riley［著］

楽しめる
物理問題200選

近重悠一／伊藤郁夫／加藤正昭［訳］

朝倉書店

200 Puzzling Physics Problems

P. Gnädig
Eötvös University, Budapest

G. Honyek
Radnóti Grammar School, Budapest

K. F. Riley
Cavendish Laboratory, Fellow of Clare College, Cambridge

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

PUBLISHED BY THE PRESS SYNDICATE OF THE UNIVERSITY OF CAMBRIDGE
The Pitt Building, Trumpington Street, Cambridge, United Kingdom

This Japanese editon is an authorised translation
arranged by Cambridge University Press

まえがき

私たちの経験によると，物理学の法則を理解する最良の方法は，実際の問題に法則を応用することである．しかし教科書には，長く複雑な計算をしないと解けない問題がのっていることが多く，そういう問題は機械的で退屈なものになりがちで，学生には苦役でしかない．必要な技術をすべて身につけた優秀な学生でも，このような問題は魅力がなく，面倒な計算には彼らの‘創造性’（天才？）を発揮する余地がないと感じたりする．

物理の問題はそんなものだけではない．そのことを示すのがこの本の目的である．読者は，次のような質問に興味を引かれるだろう．

- 一日の長さと，自動車が道路の左と右のどちら側を通行するかということに，どのような関係があるか．
- 走り高跳びで，背面跳びの方がウエスタンロールより高く跳べるのはなぜか．
- オールドフェイスフル（イエローストーン国立公園の間欠泉）の水だめの空洞は，地下どれだけの深さにあるか．
- 火星上の山の高さは，最高でどこまで可能か．
- 装飾用の噴水でできる水の鐘は，どのような形をもつか．
- 芯を下にして立てた鉛筆の倒れ方は，摩擦にどう依存するか．
- 空まで達して静止している紐があれば，UFO の証拠になるだろうか．
- ファラデー・ケージの中に落とした陽電子は，どのように動くか．

- 月面上での走り高跳びの記録は，どれだけになるだろうか．
- 夜行性の昆虫が光源に引き寄せられてしまうのは，なぜだろうか．
- 太陽の光の明るさは月の光の明るさの何倍か．
- ロールに巻きとった消防用ホースは，どれだけ速くほどけるか．
- 二つの磁石の配置がどのような場合に，磁石は‘大きさが同じで方向が反対’ではない偶力を及ぼしあうか．
- 8 トンのシベリア・マンモスを解凍するには，どれだけの時間がかかるか．
- 自分の惑星を貪り食う宇宙人には，どのような危険が待っているか．
- 一様に帯電した棒がつくる電場は，どの方向を向くか．
- ‘エネルギーを生成するコンデンサー’の落とし穴は？
- 抵抗でつくった n 次元立方体の，等価抵抗はどれだけか．
- 砂時計の砂が落ちる時間を決める要素は何か．
- 単極発電機はどのように動作するか．
- 箱の中の電子は，どれくらいの‘深さ’の所にいるか．

以上の問題およびそのほかの 180 の問題は，変数や座標をうまく選んだり，月並みでない考え方によったり，‘巧妙な’概念や類推を用いたりすることで，すっきりと解くことができる．そのようなひらめきが生じ，‘わかった’ということになれば，解答は 2，3 行の計算や短い推論で得られることが多く，当然，学生は喜びを感じるのである．

論理だけでは十分ではない．物理学の基礎法則の知識と理解がなければ，このような創造的な考え方ができるはずはない．だから，まだ物理をあまり深く学んでいない学生には，本書の問題にとりかかることは勧めない．問題に解答できることが主要なゴールではあるが，それだけで成功を測るべきではないということも言っておきたい．ある問題を解く際に，読者がどのような助けを求

め，またどの段階まで達するとしても，その過程は啓蒙的であり，同時に，楽しいものであるだろう．読者は解答を読んで，‘何と巧妙な’とか‘すばらしい’とか言うこともあるだろうし，‘自明ではないか’とか‘何と不器用な’とか言うこともあるだろう．私たちの目的は，読者が問題を解くための‘武器庫’を拡大できるように，できるだけ多くの有用な‘トリック’を提供することである．読者はこの本を使うことから，喜びと利益を得てほしい．もし読者が同じような‘考えさせる’物理の問題に出会ったら，それをほかの人にも教えてほしい（そして私たちにもそれを送ってほしい）．

本書にとり上げた 200 問の興味ある問題は，著者たちが長年にわたって収集したものである．私たちがつくった問題もあり，また，100 年以上にわたるハンガリーの‘Secondary School Mathematics and Physics Papers’からとったものもある．ハンガリー国内の（あるいは国際的な）いろいろな物理コンテストや，ケンブリッジ大学の入試にでた問題やアイデアも（多くの場合，文章は変えて）用いた．また，同僚からも提案や意見が寄せられた．とくに，Masaaki Kato からはいくつかの有用な意見と改善の示唆があり，Alfonso Diaz-Jimenez からは宇宙船の打ち上げについての興味ある注意（S17 参照）を受けた．彼らに感謝する．国際的な‘アイデア・マーケット’に現れる物理問題は，その最初の著者を特定できないものがほとんどであるが，最良の‘考えさせる問題’の発明者として，Tibor Biro，Laszlo Holics，Frederick Karolyhazy，George Marx，Ervin Szegedi，Istvan Varga の名前はあげておくべきである．彼らに，そしてその他の，‘考えさせる物理問題’をつくり，練り上げ，改善した人々（私たちが知っている人も知らない人も含めて）に，感謝をささげたい．

2000 年

Peter Gnädig
Gyula Honyek
Ken Riley

◎ 著者紹介 ◎

Peter Gnädig： ブダペストのローランド・エートベス大学（ELTE）を1971年に卒業．同大学で理論物理のPh.Dを1980年に取得．現在はELTEの原子物理学科の講師．専門は高エネルギー物理学．1985年から国際物理オリンピックのハンガリー・チームを指導．KÖMAL（中等学校に対するハンガリー数学物理雑誌—100年の歴史をもち，挑戦的な物理の問題を毎月掲載する月刊誌）の物理部門の編者であり，ハンガリー物理コンペの組織委員でもある．

Gyula Honyek： 1975年にELTEを卒業．1977年にPh.Dを取得した後，一般物理学科の講師．1985年にELTEの教員養成学部に転じ，現職はブダペストのラドノティ・グラマースクールの教員．1986年から国際物理オリンピックのハンガリー・チームを指導．KÖMALの編集員でもある．

Ken Riley： ケンブリッジ大学で数学を学び，同大学で理論・実験核物理学でPh.Dを取得．ブルックヘブンで素粒子物理の研究員を務めた後，ケンブリッジのキャベンディッシュ研究所の講師となる．その後もラザフォード研究所やスタンフォードで研究に従事．ケンブリッジ大学のクレア・カレッジでシニア・チューターとして数学と物理の教育を30年以上続けている．

◎ この本の使い方 ◎

最初に問題がのっている．問題の順序は物理の分野に従うのではなく，ほぼ難しさの順に並び，また似た解法を要するものはグループにまとめてある．いずれにせよ，問題によっては，たとえば力学や熱力学や電磁気学に属するものというように，明確に分類することができないものもある．自然の秘密は，教科書の章の題名で表されるのではなく，いろいろな分野の概念を，複雑な形で利用していることが多い．現実の問題にはどのような型のものがあるかを見出すことも，本書の目的に含まれている．しかし読者の便宜のために，次のページに，テーマのリストと，ほぼそのテーマに属する問題の一覧があげてある．問題によっては，複数のテーマの下にあげたものもある．見返しに，主要な物理定数の記号と数値，および天文学のデータと物質の性質がいくつかのせてある．

大部分の問題はやさしくはない．はっきり難しいと言える問題もある．もちろん，読者は自分の力だけで問題を解いてほしいし，それができれば，最大の喜びを得ることは明らかである．しかしそれができなくても，そこであきらめずに，短いヒントがのせてある編の，該当するページを読むとよい．ほとんどの場合，ヒントは助けになるだろうが，ヒントには完全な解答は与えてないので，詳細は自分で考えねばならない．求めた結果を確かめたいとき（または完全にあきらめて答えだけ知りたいとき）には，最後の解答の編を参照してほしい．

同じような推論を要する問題はほぼ一まとめにしてある．しかしある問題が本書の別の場所にある問題に関係がある場合には，ヒントや解答に参照を示した．とくに難しい推論や数学的に複雑な計算を要する問題には，一つまたは二つの星印をつけてある．

ある問題の解答から，本書の範囲を超える疑問が生まれる場合もある．そのような場合には，解答の最後に，さらに考える価値のあることがらが，解答は与えずに述べてある．

問題のテーマ別分類

運動学	1, 3, 5, 36, 37, 38*, 40, 41, 64, 65*, 66, 84*, 86*
力学	2, 7, 8, 12, 13, 24, 32*, 33, 34, 35, 37, 38*, 39*, 70*, 73*, 77, 78*, 79*, 80**, 82, 83, 85**, 90, 154*, 183*, 184*, 186*, 193*, 194
重力	15, 16, 17, 18, 32*, 81**, 87, 88, 109, 110*, 111*, 112*, 116, 134*
力学的エネルギー	6, 7, 17, 18, 32*, 51, 107
衝突	20, 45, 46, 47, 48, 71, 72*, 93, 94, 144*, 194, 195
剛体の力学	39*, 42**, 58, 60*, 61**, 94, 95*, 96, 97*, 98, 99**
静力学	9, 10*, 11, 14*, 25, 26, 43, 44, 67, 68, 69*
綱，鎖	4, 67, 81**, 100, 101*, 102**, 103*, 104*, 105**, 106*, 108**
液体，気体	19, 27, 28, 49*, 50, 70*, 73*, 74, 75*, 91*, 115**, 143, 200
表面張力	29, 62, 63, 129, 130*, 131*, 132**, 143, 199*
熱力学	20, 21*, 133, 135**, 136, 145, 146*, 147, 148
相転移	134*, 137*, 138, 140*, 141*
光学	52, 53, 54, 55, 56, 125*, 126, 127, 128*
静電気	41, 90, 91*, 92, 113*, 114, 117*, 118, 121, 122, 123*, 124*, 149, 150, 151*, 152, 155, 156, 157, 183*, 192*, 193*
静磁気	89**, 119, 120**, 153*, 154*, 172, 186*
電流	22, 23, 158, 159, 160*, 161, 162*, 163*, 164*, 165, 169, 170*, 172
電磁気学	30, 31, 166, 167, 168*, 171*, 173*, 174*, 175*, 176, 177, 178*, 179, 180, 181*, 182*, 184*, 185*, 186*, 187*
原子と粒子	93, 188, 189*, 190*, 191, 194, 195, 196, 197*, 198*
次元解析，スケーリング，概算	15, 57, 58, 59*, 76*, 77, 126, 139, 142, 185*, 199*

*,**　1 個または 2 個の星印は，とくに難しい推論や数学的に複雑な計算を要する問題を示す．

問　　題

P1 一辺 60 cm の正三角形の各頂点に，かたつむりが 1 匹ずついる．1 匹目は 2 匹目に向かって，2 匹目は 3 匹目に向かって，3 匹目は 1 匹目に向かって，それぞれ一定の速さ $5\,\mathrm{cm{\cdot}min^{-1}}$ で動き始める．3 匹は，常に自分の相手を目指して動き続ける．3 匹が出会うまでの時間と，それまでに動いた距離を求めよ．かたつむりの軌跡を式で表せ．かたつむりを質点と考えると，最終地点のまわりを何回まわることになるか．

P2 水平な机の面の端に，小さな物体が静止している．これを押すと，幅 1 m の机の反対側の端から 2 秒後に落下する．この物体には車輪がついているか．

P3 静水上なら速さ $3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ で進めるボートがある．ある人が最短距離を漕いで川を渡りたい．流速が 1) $2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ のときと 2) $4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ のときには，それぞれ岸から何度の方向に漕がなければならないか．流速はどこでも同じとする．

P4 長くて薄く，曲がりやすいじゅうたんが，床に敷いてある．じゅうたんの端を折り曲げて後ろに引っ張り，床にまだ静止している部分の上を，一定の速さ（単位速さ）で動かす．動いている部分の質量中心の速さを求めよ．じゅうたんが単位長さと単位質量をもつとすれば，引っ張るのに必要な最小の力はどれだけか．

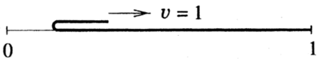


図 P4

P5 非常に広い平面の上で，4 匹のかたつむりがそれぞれ等速直線運動をしている．その道の方向はばらばらだが（ただしどれも平行ではない，すなわちどの 2 匹も出会う可能性がある），2 本以上の道が 1 点で交わることはない．出会いの可能性は $(4 \times 3)/2 = 6$ 通りあるが，そのうちの 5 回は実際に起きた．6 回目の出会いも起きるはずだと断言してよいか．

P6 20 g の平らな虫（条虫）が 2 匹，高さ 10 cm の薄い壁を登って乗り越える．一方の虫の長さは 20 cm で，もう一方の虫は幅が広いので長さは 10 cm

である．体長の半分が壁の上端を越えるまでに重力に逆らって行う仕事は，どちらの虫の方が多いか．2 匹の虫が行う仕事量の比はいくらか．

P7　身長 $h_0 = 2\,\mathrm{m}$ の人が，湖水面からの高さが $h = 25\,\mathrm{m}$ の台からバンジージャンプをする．ゴム紐の一端を足首にくくり，他端は台に固定する．彼は静止の状態から，体を鉛直にして落ち始める．

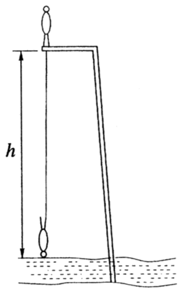


図 P7

ゴム紐の長さと弾性の強さは，頭が水面についたときに速さがゼロになるように選んである．最終的には彼はゴム紐にぶらさがって静止するが，そのとき頭は水面から 8 m のところにある．

1)　伸びていないときのゴム紐の長さを求めよ．

2)　このジャンプの間に達する最大の速さと最大の加速度を求めよ．

P8　上向きの正四角錐の形の氷山が，水面から 10 m 頭を出している．氷山の小さな上下振動の周期を求めよ．振動によって起きる海水の運動は無視して考えよ．氷の密度は $900\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ である．

P9　4 輪とも同一のサスペンションばねがついている自動車がある．高さ 8 cm の歩道上に右前輪を乗り上げて駐車するとき，各車輪の位置で，車体（剛体とみなす）はどれだけ持ち上がるか．右前輪と右後輪をともに歩道に乗せて駐車するときは，結果は変わるか．この結果は，車内にいる人の数と位置によ

るだろうか.

P10* ヴィクトル・ユーゴーの小説「レ・ミゼラブル」で，主人公の脱獄囚ジャン・ヴァルジャンは，二つの鉛直な壁が直角に交わる隅を登れることで有名だった．登っている間，壁を押しつけていなければならない，最小限の力を求めよ．この離れ技に必要な静止摩擦係数は，最低どれだけか.

訳注 ユーゴー作/豊島与志雄訳，レ・ミゼラブル << 1 >>(岩波文庫)，171 頁参照.

P11 材質の異なる二つの一様な半球を張り合わせて球をつくり，水平から 30° 傾斜する斜面の上に置く．この球は斜面上で静止できるか.

P12 水平から角 α 傾く長い斜面に，よくはずむ小さなボールが鉛直に落ちる．斜面でボールが何度も跳ね返るときに，跳ね返る点の間隔は等差数列的に増加していくというのは正しいか．衝突は完全弾性的で，空気抵抗は無視できると仮定せよ.

P13 摩擦のない中心軸をもつ円形の回転かごに，小さなハムスターを入れる．水平な台が軸の下方でかごに固定してある．ハムスターははじめ，台の端に静止している.

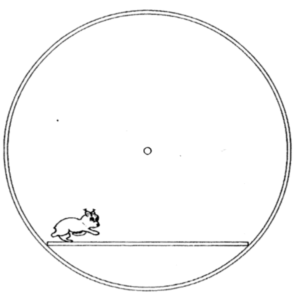


図 P13

かごから手を離すと同時に，ハムスターは走り出す．ところがハムスターの

運動のために，かごと台は静止したままである．ハムスターはどう動くか．

P14* 　自転車を，前後には動けるが横には倒れないように支える．自転車のペダルの位置は，一方は最高点に，他方は最低点にある．学生が自転車の横にしゃがみ，低い方のペダルに後輪方向を向く力を加える．

1)　自転車はどちら向きに動くか．
2)　チェーンをかけてある歯車の回転の向きは，後輪の回転の向きと同じか逆か．
3)　低い方のペダルは，地面に対してどちら向きに動くか．

P15　太陽系を相似的に縮小して，太陽と地球の間の平均距離が 1 m になったとすると，1 年の長さはどれだけになるか．物質の密度は変わらないとする．

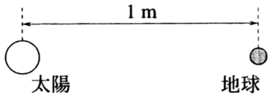


図 P15

P16　ある連星をつくる二つの星の質量がどちらも太陽の質量に等しく，二つの星の距離が太陽と地球の間の距離に等しければ，この連星の回転周期はどれだけか．

P17　1)　人工衛星を円軌道にのせるために必要な，最小の打ち上げ速度はどれだけか．
2)　極をまわる軌道への打ち上げに要するエネルギーは，赤道上の軌道のときの何倍か．
3)　地球の重力場を脱出するためには，宇宙探査機はどれだけの初速をもたねばならないか．
4)　宇宙探査機が太陽系を脱出するときと，太陽に衝突するときでは，はじめに必要なエネルギーはどちらが大きいか．

P18　ロケットを地球の重力場から脱出させようとする．主エンジンの燃料

は必要量より少し足りないので，短時間だけ働く補助エンジンも使わねばならない．補助エンジンをいつ点火するのがもっともよいか．離陸時か，ロケットが地球に対してほとんど止まったときか，あるいはいつでもかまわないか．（訳注　本問の‘ロケット’は，宇宙船の意味で用いられている.）

P19　蜂蜜がつまった密閉容器内で，体積 $1\,\mathrm{cm}^3$ の鉄球が速さ $1\,\mathrm{cm\cdot s^{-1}}$ で沈んでいく．蜂蜜の密度を $2\,\mathrm{g\cdot cm^{-3}}$ とすれば，蜂蜜の運動量はいくらか．

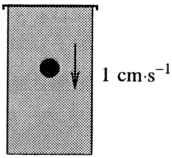


図 P19

P20　温度 T の気体を，壁の（はじめの）温度が T_1 の容器に入れる．気体が容器の壁に及ぼす圧力は，$T_1 < T$ と $T_1 > T$ のどちらの場合の方が高いか．

P21*　二つの全く同じ鉄の球を考える．一方は断熱板の上にあり，他方は断熱糸で吊るしてある．

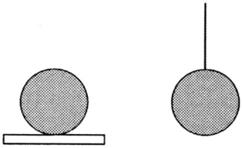


図 P21

二つの球に同量の熱を与えると，どちらの球の温度がより高くなるか．

P22　寮の隣どうしの部屋に住む二人の（物理専攻ではない）学生 A と B が，節約のため天井の電灯を直列につなぐことにした．どちらも 100 W の電球を部屋につけ，電気代は折半すると約束した．しかしどちらも，相手の費用で

自分の方をもっと明るくしようと考え，A は 200 W の電球を，B は 50 W の電球をつけた．その後，期末試験に落ちたのはどちらか．

P23　図 P23 のブラック・ボックスの端子 I に電圧 V の電池をつなぐと，端子 II につないだ電圧計の読みは $V/2$ を示す．逆に端子 II にこの電池をつなぐと，端子 I につないだ電圧計の読みは V を示す．このブラック・ボックスは受動的回路素子だけを含む．どのような素子か．

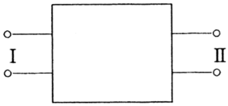


図 P23

P24　水の入ったバケツが，ロープで一点から吊るしてある．バケツを動かして系に振り子の運動をさせる．しかしバケツには水漏れがあって，底から水がゆっくり流れ出ている．水量が減るにつれて，振り子の周期はどう変わるか．

P25　質量 100 g，半径 30 mm の，厚さは無視できる空の円筒形ビーカーの重心が，底から 100 mm のところにある．ビーカーをできるだけ安定に保つには，水をどこまで入れるべきか．

P26　直径 40 cm の銅製の半球形ボウルで魚のスープをつくる (図 P26 (次ページ) 参照)．スープを冷やすためにボウルを湖の水につけると，ボウルは 10 cm だけ沈んで浮く．

ボウルの縁の一点についている鎖で，この点を 10 cm 上に引き上げる．ボウルに水が入ってくるか．

P27　容器の底にある半径 r の丸い穴を，質量 m，半径 R ($R > r$) の球でふさぎ，容器に水を満たす (図 P27 (次ページ) 参照)．水深をゆっくり減らしていくと，ある値 h_0 のところで球が穴から浮き上がる．h_0 を求めよ．

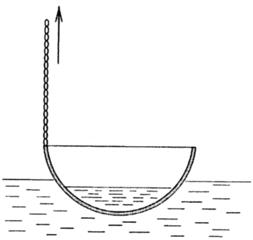


図 P26

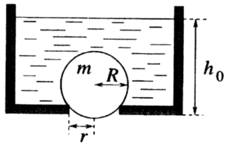


図 P27

P28　ヘリウムの入ったシャボン玉が空中に浮かんでいる．石鹸膜と中に入っているヘリウムガスとでは，どちらの質量が大きいか．

P29　毛細管の壁をぬらす（壁に付着する）水が，鉛直な毛細管中を高さ H まで昇る．3本の‘絞首台’(a)，(b)，(c) は同じ管からなり，いずれも一端は，図 P29 のように水を満たした大きな容器にさしこんである．

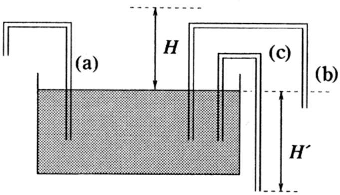


図 P29

毛細管のもう一方の端から水が流れ出るか．

P30　球面コンデンサーの同心面極板の間に誘電体を入れる．誘電体がもつわずかな伝導性のために，帯電したコンデンサーはゆっくりと放電する．放電の電流がつくる磁場は，どのような大きさと方向をもつか．

P31　帯電した導体球が，半径方向に脈動する．つまり球の半径が，ある振

幅で周期的に変化する（図 P31 参照）．球面上の電荷は，双極子アンテナの働きで電磁波を出す．球からの輻射は全体としてどのような形をもつか．

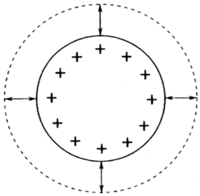


図 P31

P32* 　男子走り高跳びの世界記録保持者は，月面上（の室内競技会！）では，どれだけ跳べるか．

P33 　高さ 1 m の机の端に，小さな鉄球 B が静止している．もう一つの鉄球 A は，1 m の単振り子のおもりである．この振り子が，水平に静止している状態から動き始め，図 P33 のように B に向かって振れる．2 球の質量は等しく，衝突は弾性的である．

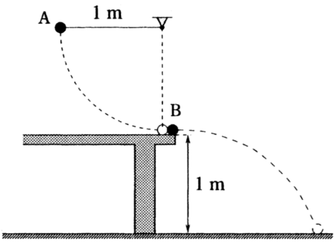


図 P33

B の運動は，最初に床にあたるまでだけを考えることにすれば，

1)　運動の時間はどちらの球の方が長いか．

2)　動く距離はどちらの球の方が長いか．

P34　長さ 50 cm の紐の端に小さなおもりがついている．紐の他端をうまく動かすと，おもりは鉛直面内で，半径 50 cm の円の上を一定の速さ $3.0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ で動く．円周を 15° ずつに区切って紐の両端の軌跡を描き，両者の上の対応する点を記せ．

P35　斜面の上方に点 P がある．P から斜面に達するのに，P と斜面上の点 P′ の間に摩擦のない針金をまっすぐに張り，重力の下で針金に沿って滑って行く．かかる時間を最小にするには，点 P′ をどこにとるべきか．

P36　ある教会の時計の長針は，短針の 2 倍の長さをもつ．長針の先端が短針の先端からもっとも速く離れていくのは，午前 0 時以降ではいつか．

P37　石を投げるとき，投げた人から石が離れ続けるようにするには，水平から何度以内の方向に投げるべきか．

P38*　水平な野原に直径 20 cm の丸太が転がっている．怠け者のキリギリスがこの丸太を跳び越したい．キリギリスは最低どれだけの速さで跳び上がればよいか．(空気の抵抗は無視する．)

P39*　一様で真っ直ぐな硬い髪の毛が，滑らかなテーブルの上にある．髪の毛の両端には蚤が乗っている．髪の毛の質量 M が蚤の質量 m と比べてそれほど大きくなければ，2 匹の蚤が同じ角度と同じ初速で同時に跳ね上がって，空中でぶつからずに髪の毛の端を交換できる．このことを示せ．

P40　たらい状の容器の水面に，小さな半球の散水口が出ている噴水がある．散水口には一様に分布した多数の穴があり，そこから，水があらゆる方向に同じ速さで噴き出す．

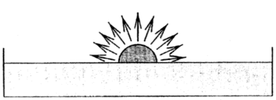


図 P40

水流がつくる水の‘鐘’はどのような形をもつか.

P41　質量 m と電荷 Q をもつ粒子が，重力および強さ E の水平方向の一様な電場から力を受ける．電場と平行な鉛直面内で，粒子を速さ v で水平との角 θ の方向に打ち出す．粒子が出発点と同じ高さに戻るまでに到達する，水平方向の最大距離を求めよ．

P42**　質量 m，長さ ℓ の一様な棒の両端を，両手の人差し指で水平に支える．2本の指を棒の中央までゆっくり動かすとき，棒はどちらか一方の指の上を滑る．静止摩擦係数を $\mu_{\rm stat}$，動摩擦係数を $\mu_{\rm kin}$（$\mu_{\rm kin} \leq \mu_{\rm stat}$）とすると，この過程の間にどれだけの仕事をしなければならないか.

P43　4個の同じ煉瓦が机の端に積み重ねてある．この煉瓦をたがいに水平にずらして，一番上の煉瓦の射影を机の外に完全にはみ出させることは可能か．煉瓦の数を任意に増していくとき，一番上の煉瓦の位置について，どのような理論的限界があるか.

P44　中心線に沿って直角に折り曲げた板が，半径 R の水平に固定された円柱の上にかけてある．

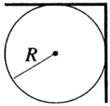


図 P44

この板が円柱から滑り落ちないためには，円柱と板の間の静止摩擦係数はどれだけ必要か.

P45　質量 m_1 と m_2 の二つの弾性球を，わずかな隙間をあけて上下の位置に持ち，両者を地面に落とす．上側の球が最終的に受け取るエネルギーの，全エネルギーに対する割合が最大になるのは，比 m_1/m_2 がどれだけのときか．上

の球ができるだけ高く跳ね上がるには，質量の比はどれだけの必要があるか．

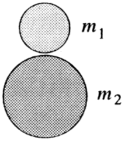


図 P45

P46 質量 M，μ，m の三つの鋼球をこの順にそれぞれ吊るした，高級な玩具がある．三つの球の中心は 1 本の水平な線の上にある．三つの球を含む鉛直面内で，質量 M の球を，中心が h だけ上がるまで横に引っ張り，手を離す．$M \neq m$ で，すべての衝突が弾性的であるとき，質量 μ をどう選べば，質量 m の球ができるだけ高く上がるか．その最高の高さはどれだけか．(衝突のくり返しは考えなくてよい．)

P47 水平なエアクッション面の上で，二つの同じダンベルが図 P47 のように近づく．ダンベルは質量 m の二つの質点を，質量は無視できる長さ 2ℓ の棒でつないだものとみなせる．はじめは，ダンベルは回転していない．弾性衝突後のダンベルの運動を説明せよ．各ダンベルの質量中心の速さを，時間の関数として描け．

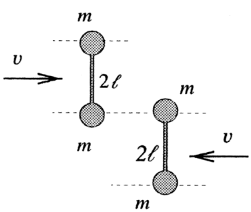


図 P47

P48 小さく滑らかな，二つの全く同じ物体 A と B が，凍った湖面上を自

由に滑ることができる．A と B は，軽くて柔らかな長さ $\sqrt{2}L$ の綱で結ばれている．この綱は，ぴんと張るとそれ以上はほとんど伸びない性質をもつ．時刻 $t=0$ に，A は $x=y=0$ に静止し，B は $x=L$，$y=0$ で，y 方向の正の向きに速さ V で動いている．1) $t=2L/V$ および 2) $t=100L/V$ での，A と B の位置と速度を求めよ．

P49* 四角柱の容器の上にある注水口を開けると，空の容器は時間 T_1 で満水になる．注水口を閉め，底面の排水口を開けると，時間 T_2 で容器は空になる．では，注水口と排水口の両方を開けるとどうなるか．水があふれるのは，時間比 T_1/T_2 がどのような場合か．具体例として $T_1=3$ 分，$T_2=2$ 分としてみよ．

P50 高さ h，半径 a の円筒の容器に，液体が 2/3 まで入っている．鉛直な中心軸のまわりに，容器を一定の角速度 ω で回転させる．表面張力の効果は無視して，液体が容器の縁からあふれ出さない範囲の，最大角速度 Ω を求めよ．

P51 ピーターは自動車レースのトラックのそばに立っている．ある車が，静止から速さ $100\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ まで加速するのに x リットルの燃料を使ったので，あと $3x$ リットルの燃料を使えば，速さを $200\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ まで増せるだろうと計算した．彼は物理で，運動エネルギーは速さの 2 乗に比例することを学んでいたのである．ピーターは，燃料のエネルギーはおもに運動エネルギーに変わると仮定した．つまり空気抵抗や他の摩擦は無視した．

このトラックのそばを線路が通っている．車と逆方向に速さ $100\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ で走る列車の窓から，ポールもレースのスタートを見た．彼も物理をいくらか知っていて，次のように考えた．車の速さは第一段階では $100\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ から $200\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ まで増したのだから，第二段階で $200\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ から $300\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ まで加速するときには，$(300^2-200^2)/(200^2-100^2)\,x=(5/3)\,x$ リットルの燃料が必要である．

ピーターとポールのどちらが正しいか．

P52 光学台に並ぶ光源とスクリーンの距離は 120 cm である．この二つを結ぶ直線上でレンズを動かすと，鮮明な像が 2 個所で得られる．この二つの像の（1 次元的な）大きさの比は 9 : 1 である．レンズの焦点距離はどれだけか．

どちらの像の方が明るいか．この二つの像の明るさの値の比を求めよ．

P53 近視の人が眼鏡をはずし，目から眼鏡を離していきながら，一定の位置にある物体を眼鏡を通して見る．驚いたことに，はじめは物体はだんだん小さくなるが，その後はだんだん大きくなる．その理由は何か．

P54 断面が二等辺三角形のガラスのプリズムを，底面を水平にして水に浸す．プリズムの斜辺と底面の間の角は，どちらも θ である．

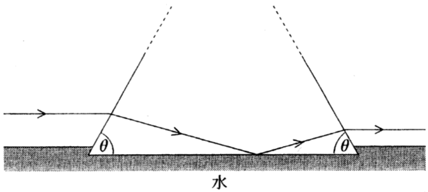


図 P54

水面の上を，水面と平行，かつ，プリズムの軸と垂直に入射する光線が，ガラスと水の境界面でプリズム内に全反射した後，ふたたび空気中に出る．ガラスと水の屈折率をそれぞれ $n_{\mathrm{g}} = \frac{3}{2}$ および $n_{\mathrm{w}} = \frac{4}{3}$ とすれば，θ は 25.9° 以上でなければならないことを示せ．

P55 円柱を 4 等分した形のガラスのプリズムが，水平な机の上にある．図 P55 に示すように，一様な水平光線がプリズムの鉛直面に入射する．

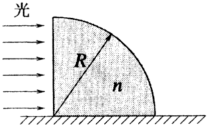


図 P55

この光は，円柱の先の机の上に，広がった像をつくる．円柱の半径が $R = 5\,\mathrm{cm}$，ガラスの屈折率が $n = 1.5$ ならば，像はどの範囲にあるか．

P56　太陽の光の明るさは月の光の明るさの何倍か．月のアルベド (反射率) は $\alpha = 0.07$ である．

P57　背の高いアンディはアニーのボーイフレンドで，二人はよく一緒にジョギングをする．彼らは，走っているときは二人はほぼ同じ速さで進むが，歩くときはいつもアンディの方が速いことに気づいている．走る際と歩く際のこの違いは，物理的にみてどう説明できるだろうか．

P58　単振り子と，一端を回転軸とりつけた一様な棒を，どちらも水平な位置から放す．両者の長さが同じであるとき，振れの周期の比はどれだけか．



図 P58

P59*　あるヘリコプターは，エンジンの出力が P のとき，ホバリング（空中で停止すること）ができる．もう1機のヘリコプターは，最初のヘリコプターの完全な複製だが，1次元的な大きさが元のものの半分である．2機目のヘリコプターのホバリングを可能にするには，どれだけの出力が必要か．

P60*　机の端でほぼ鉛直に立っている一様な棒から手を離す．棒と机の接触がなくなる瞬間に，棒が鉛直方向となす角を求めよ．以下の二つの極端な場合を調べよ．

1) 机の端は滑らか（摩擦が無視できる）だが，図 P60(a) に示すような小さな段差がある．

2) 机の端は粗く（摩擦が大きい），鋭い角がある．すなわち机の端の曲率半径は，棒の平らな底面の曲率半径よりずっと小さい．棒の底面は机の端から半分はみ出していて（図 P60(b) 参照），その結果，静止の状態から手を離すと，棒は机の端のまわりを回転する．棒の長さは直径よりずっ

と長い.

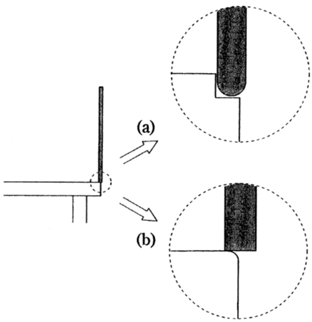


図 P60

P61** 机の上で鉛筆を鉛直に，先端（芯の先）を下にして立てる．手を離して鉛筆が倒れるとき，倒れる方向に対して先端が動く方向は，摩擦係数によってどう変わるか．鉛筆の先端は机から離れるだろうか．（最後に鉛筆の‘肩’が机に接するようになるのは別にする.）

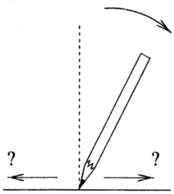


図 P61

P62 半径 R_1 と R_2 の二つのシャボン玉が，ストローを通してつながっている．一方の泡からもう一方の泡に空気が移り（どちら向きか？），半径 R_3 の一つのシャボン玉ができる．大気圧を p_0 とすれば，石鹸液の表面張力 γ はどれだけか．この三つの半径を測ることは，液体の表面張力を決めるのに適した方法か．

P63　水はガラスをぬらす.(訳注　ガラスに付着するともいう.) 2枚の平行なガラス板の間に水が挟まれている. 2枚の板の間隔は d, 閉じ込められた水の'円板'の直径は $D \gg d$ である. ガラス板の間に働く力はどれだけか.

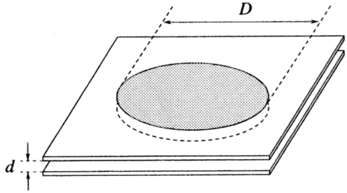


図 P63

P64　くもが長さ 1 m の'超弾性的な'糸の一端を, 鉛直な壁に固定する. その糸の上の一点に, 小さな毛虫がのっている.

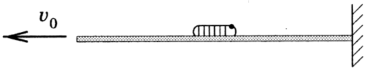


図 P64

飢えたくもは, はじめの場所から動かずに, 一定の速さ $v_0 = 1\,\mathrm{cm \cdot s^{-1}}$ で, 糸の他端をたぐり始める. 一方毛虫は, 動いている糸に対して一定の速さ $1\,\mathrm{mm \cdot s^{-1}}$ で, 壁に向かって逃げ始める. 毛虫は壁にたどり着けるか.

P65*　くもが一カ所にいるのではなく, 糸の端をもって (壁から離れる向きに) 動くとすれば, 前問の解答はどう変わるか.

P66　鉛直に置いた画板に, 多数の釘を水平に打ち込む. 図 P66 に示すように, 点 A から落ちた小さな鋼球が, 突き出ている釘 (図に釘は示してない) で弾性的に跳ね返りながら, 点 B まで達する.

釘を次のように並べられるか.

1)　球が点 A から点 B まで達するのにかかる時間が, 最短経路, つまり直線

AB に沿って摩擦なしで滑る場合より短い.

2) 球が 0.4 s 以内で点 B に達する.

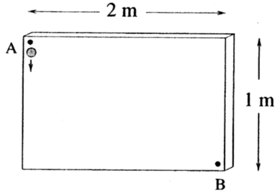


図 P66

P67 ロープの一端を鉛直な壁に固定し，他端を水平方向の，大きさ 20 N の力で引っ張る．ロープは曲がりやすく，図 P67 のような形をとる．ロープの質量を求めよ．

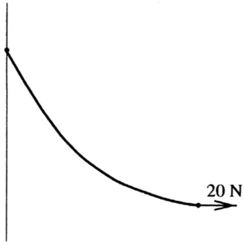


図 P67

P68 コンパスを，一方の針先にとりつけた糸で図 P68 のように吊るすとき，ピボット（2 本の脚をつなぐ軸）の位置をできるだけ高くするには，脚をどれだけの角度で開けばよいか．コンパスの 2 本の脚の長さは同じとする．

P69* 重さ W の一様な三角形の板の頂点に，長さ h_1，h_2，h_3 の糸をとりつける．これらの糸のもう一方の端は，図 P69 のように共通の支点に結ぶ．

それぞれの糸の張力は，3 本の糸の長さと板の重さを使ってどのように書け

るか.

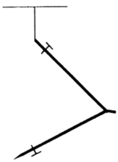


図 P68

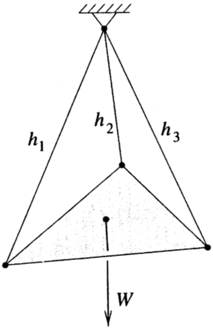


図 P69

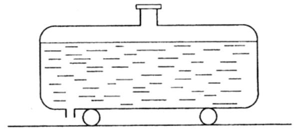


図 P70

P70*　液体を満たしたタンク車が，水平な道に，ブレーキをかけずに駐車している．タンク車が動くとき，摩擦は働かないと考えてよい．

タンク車の後部にある，液体を取り出す鉛直な管の栓をあけると，タンク車はどの方向に動きだすか．タンク車はその方向にいつまでも動き続けるだろうか．

P71　距離 d だけ離れて水平に置かれた平行な 2 本の長い棒に，それぞれ一つずつビーズを通してある．ビーズは摩擦なしに滑ることができる．ビーズの質量は m と M で，それぞれ電荷 q と Q を帯びている．はじめは，質量の大きい方のビーズ M は静止し，もう一方のビーズが遠方から速さ v_0 で近づいてくる．

この後の二つのビーズの運動を説明せよ．

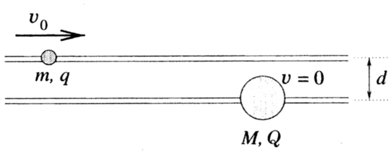


図 P71

P72* 長い水平な針金に通した多数の等質量のビーズが，等間隔で並んでいる．ビーズははじめは静止しているが，摩擦なしで動くことができる．

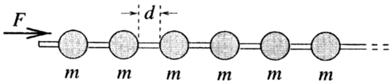


図 P72

ビーズのうちの一つを，一定の力 F で（右向きに）加速し続ける．長い時間が経過した後の，加速されたビーズの速さ，および'衝撃波'の波面の速さはどれだけか．ビーズどうしの衝突が次の二つの場合について求めよ．

1) 完全非弾性衝突のとき
2) 完全弾性衝突のとき

P73* 重量秤の上に，テーブルと大きなジョッキが載っている．テーブルにはビア樽が置いてあり，蛇口はジョッキの真上にある．蛇口を開けてビールをジョッキに注いでいくと，秤の読みはどのように変化するか．

P74 半円形の断面をもつ水平な樋（とい）に，水流が図 P74 のように斜めの角度から流れ込む．水流は樋の中心線を含む鉛直面内にある．

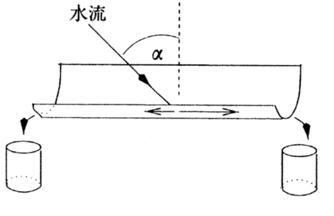


図 P74

樋の両端から流れ出す水量の比を，水流の入射角 α の関数として表せ．

P75* 上部が開いた直径 D の鉛直な管に高さ h まで水を満たす．管の底は

図 P75 のように細くくびれていて，直径 d の口は栓で閉じてある．

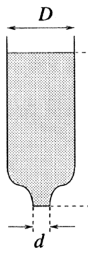


図 P75

栓をはずすと，水は底の口からほぼ $v=\sqrt{2gh}$ の速さで流れ出す．しかしこの速さになるのは，ある時間 τ が経過してからである．この τ の大きさの桁を概算せよ．栓をはずした瞬間の，最下層にある水の加速度はどれだけか．粘性の効果は無視せよ．

P76* 砂時計の砂が落ちる時間を，合理的に概算せよ．現実的なデータを使うこと．

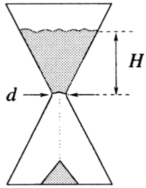


図 P76

P77 図 P77 のように，小さなおもりに 2 本の軽い同じばねをつなぎ，ばねの伸びがない状態で両端を固定し，全体を一直線にする．

ばねのなす直線に対しておもりを垂直方向に 1 cm 変位させてから放すと，おもりは周期 2 秒で振動する．もし，おもりを 2 cm 変位させて放すとしたら，周

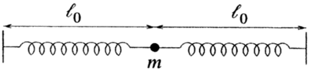


図 P77

期はどれだけになるか．ばねの自然長は $\ell_0 \gg 1\,\mathrm{cm}$ であるとし，重力の影響は考えないものとする．

P78*　自然長が L，ばね定数が k の軽くて弱いばねの一方の端を回転軸に固定し，もう一方の端には質量 m の物体をとりつける．図 P78 のように，ばねが伸びていない水平の位置でおもりを放す．

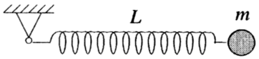


図 P78

鉛直の位置まで達したときのばねの長さはどれだけか．(ばねが弱いというのは，$mg \gg kL$ で，ばねの張力は常に伸びに比例するということである．)

P79*　質量 m の重い物体を糸で貨車の中に吊るす．貨車は保安用の試験レールの上を速さ v_0 で走る．

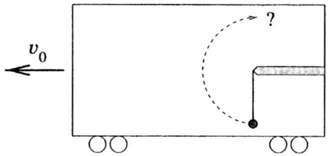


図 P79

貨車を一定の強い力でブレーキをかけて停車させる．このとき，振り子が 180° の角度まで振れ，糸がたるまずに鉛直になることがあり得るか．

P80**　図 P80 のように，角度 α 傾いた広い斜面の上を，摩擦なしで滑る三角柱がある．三角柱には水を半分ほど入れたコップが固定してある．斜面の質量を M，三角柱とコップと水の全体の質量を m とする．

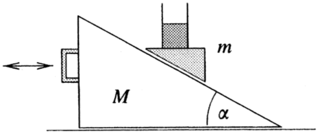


図 P80

何も動いていなければ，水面は水平のはずである．次のそれぞれの場合に，水面が最終的に斜面となす角度はどれだけか．

1)　斜面が固定されているとき

2)　斜面が摩擦なしに自由に水平に移動できるとき

$m \gg M$ の場合についても調べよ．斜面につけた取っ手を（三角柱が斜面から落ちない範囲で）周期的に揺り動かすと，何が起こるか．

P81**　もし，空のかなたから鉛直に，ほぼ地上まで垂れ下がって静止している紐を発見したら，それは UFO の証拠と考えるべきだろうか，それとも，物理の周知の法則に合う‘地上世界の’説明があり得るのだろうか．そのためには，紐の長さはどれだけであればよいか．

P82　幅 100 m の川に放物線の形の橋がかかっている．橋の最高点は岸の高さよりも 5 m 上にある．質量 1000 kg の車が一定の速さ 20 m · s^{-1} で橋を渡っている．

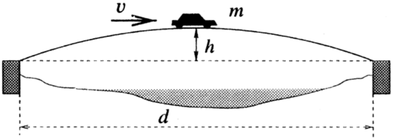


図 P82

図 P82 に示した記号を使い，車が次の位置にいるとき橋に及ぼす力を求めよ．(空気抵抗は無視し，g は $10\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ とせよ．)

1) 橋の最高点にいるとき

2) 3/4 だけ渡ったとき

P83 質量 0.5 kg の質点が楕円形のトラックを一定の速さ $5\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ で動く．質点は，長軸の両端の点では外向きに 10 N の力を受け，また短軸の両端では同様に 1.25 N の力を受ける．楕円の両軸の長さはどれだけか．

P84* まっすぐで一様な運河の一方の岸から，そこと真向かいの地点にある目印をめざして，ある人がボートを漕ぎ出す．運河の流れの速さはいたるところで v である．彼がボートを漕ぐ速さは，もし流れがなければやはり v である．彼はボートを常に目印の方向に向けるが，流れのために下流に流される．幸い彼は疲れを知らない！ ボートは下流にどれだけの距離を流されるか．岸に対してどのような軌道を描くか．

P85** 広い丘の斜面に二人の子供が立っている．斜面は平らな面とみなせる．斜面は凍っていて，わずかに押されても，子供は転んで坂を一定の速さで滑り落ちる．

子供の一人が (木に寄りかかりながら) ふざけてもう一人の子供を，水平方向に速さ $v_0 = 1\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ で押す (図 P85 参照)．押された子供は斜面を滑り落ちるが，その速度は，大きさと方向がどちらも時間とともに変化する．空気抵抗は無視でき，摩擦力は速さによらないとすれば，押された子供の最終的な速さはどれだけになるか．

P86* まっすぐな海岸から，密輸船が海岸と垂直な方向に，一定の速さ v で走りだす．密輸船から距離 a の所にいた沿岸警備艇が，密輸船と同時に海岸を離れる．警備艇は一定の速さで，常に密輸船がそのときいる方向に進み，海岸から距離 a の所で追いつく．警備艇の速さは密輸船の速さの何倍か．

P87 質量 m の点状の物体が正 n 角形の各頂点に静止している．図 P87 は $n = 6$ の場合を示す．

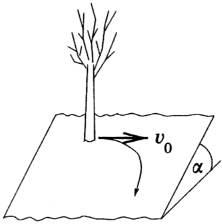


図 P85

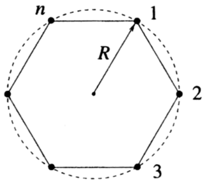


図 P87

物体間には重力（万有引力）だけが働くとすれば，系はどのような運動をするか．$n=2$，3，10 の場合について，物体どうしが衝突するまでの時間を求めよ．$m=M_0/n$ として（M_0 は一定の全質量），$n \gg 1$ の極限の場合についても調べよ．

P88　半径 R の球形の惑星から打ち上げられた宇宙船が，打ち上げ時の速度ベクトルと平行な速度ベクトルで帰還する．惑星の中心から見たときに，打ち上げ地点と帰還地点とは角度 θ だけ開いている．この宇宙船の飛行時間はどれだけか．ただし，この惑星の表面すれすれを飛行する人工衛星の周期を T_0 とする．宇宙船の惑星表面からの最大距離はどれだけか．この解析は $\theta \to 0$ の場合にもあてはまるかどうかを考えよ．

P89**　磁気モーメントが μ の二つの同じ小さな磁石を，長さ L の木製の棒の両端に，片方（C とする）は棒に平行に，もう一方（D とする）は棒に垂直に，糊付けして固定する．

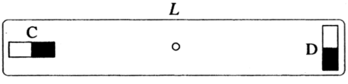


図 P89

1) 磁気モーメントがたがいに及ぼす偶力は，'大きさが等しく向きが反対' では<u>ない</u>ことを示せ．

2) 棒を重心の所で吊るして，そのまわりで自由に動けるようにするとき起きることを，定量的に説明せよ．地球の磁場は無視する．

P90 質量 m，電荷 q をもつ点状の物体を，固定された大きな金属面の上方にもってきて，面から距離 d の所で放す．物体が面に到達するまでの時間はどれだけか．重力は無視せよ．

P91* 10^{-8} C の電荷が一様に帯電した，直径 1 cm のプラスチック球を，塩水の入った大きな容器の上に，絶縁性の糸で吊り下げる．球の最下点は水面から 1 cm 上にある．その結果，球の下の水面はわずかにもち上がる．

球の真下の水面の上昇はどれだけか．表面張力の効果は無視せよ．塩水の密度は $1000\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ とする．

P92 点電荷が，薄い金属の球殻の内側で，中心からずれた位置に静止している．電荷に作用する力はどれだけか．

P93 質量数 $A = 10$ のホウ素原子のイオンと，種類不明の粒子のイオンビームが，同じ (非相対論的な) 速さで反対方向に動く．両者を衝突させるときの，ホウ素原子の最大散乱角は 30° である．粒子ビームはどの原子のビームか．

P94 ビリヤード球が滑らずに転がっていき，静止している同様なビリヤード球と正面衝突をする．衝突後の二つの球の運動を説明せよ．終わりの状態は，球とビリヤード台の間の動摩擦係数にはよらないことを証明せよ．(転がり摩擦は無視できるものとする.)

P95* 水平と角 α をなす長い滑り台に，多数の同じローラーが間隔 d で取り付けてある．ローラーは水平な軸をもつ鋼鉄の円柱で，表面をゴムで覆ってある．各ローラーの質量は m，半径は r である．d に比べて非常に長い質量 M の板を，滑り台の一番上から放す．

板の最終速度 $v_{\max}$ を求めよ．空気抵抗およびローラーの軸の摩擦は無視せよ．

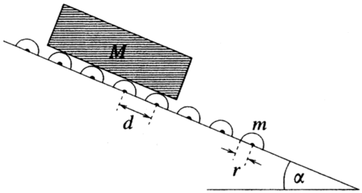


図 P95

P96　水平なテーブルにテーブルクロスを敷き，その上に鋼鉄球を置く．球の下からテーブルクロスを引き抜くと，摩擦によって球が動き，転がる．

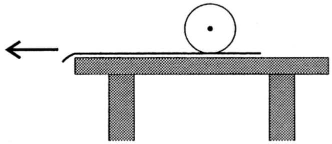


図 P96

球が滑らずに転がる状態に達したとき，その速さはどれだけか．（テーブルは広く，球が落ちることはないと仮定せよ．）

P97*　もし英国の法律が変わって，自動車が道路の（左側ではなく）右側を通行することになったとすると，1 日の長さは増えるか，減るか，それとも変わらないか．

P98　物理を応用した曲芸がある．密度が等しく半径が r と $R = 2r$ の二つの球を，大きな方の球の中心が，質量 $M = 6\,\text{kg}$，長さ $L = 2\,\text{m}$ の台車の中央にくるように置く（図 P98 参照）．小さな球の質量は $m = 1\,\text{kg}$ である．大きな球は台車の上にあり，二つの球の中心を結ぶ直線は常に水平と $60°$ に保つようにして，二つの球を滑らずに転がらせる．台車を図に示した向きに水平方向の力で引っ張る．

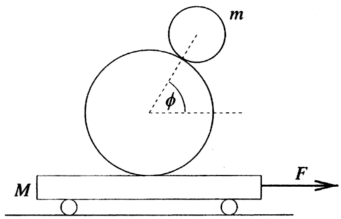


図 P98

1) 力の大きさ F を求めよ.

2) 球が台車から落ちるまでにどれだけの時間が経過するか.

P99** オーストラリアのキャンベラにある科学博物館に，次のような装置がある．水平なテーブルの中央部から円板を切り取り，それを回転軸の上に乗せて，元の位置にはめ込んである．

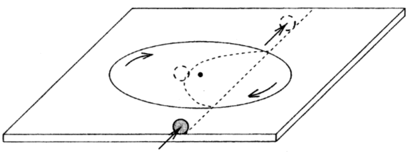


図 P99

図 P99 に示すように，円板を回転させ，固いゴムボールをテーブル上で転がす．ボールが回転している円板に達すると，ボールは直線の道をはずれ，曲線の道に沿って進む．円板から出ると，ボールは元の直線の延長上の道を，滑らずに転がる．このときの速さは，円板に達する前の速さと同じである．

この運動を説明するには，何の保存則を使えばよいか．

P100 密度 ρ，ヤング率 E の材料でできた半径 R の細い輪が，滑らかな面の上に置いてある．輪の中心を通り面と直交する直線を軸として，輪を角速度

ω で回転させる．輪の周長（円周）はどれだけ増えるか．増加量は小さいと仮定する．

P101　固定した円柱に，軽くて伸びない糸を半周させ，図 P101 のように糸の両端を引っ張る．

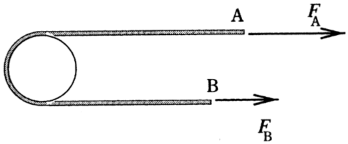


図 P101

摩擦のために糸が円柱上を滑らないのは，両端に働く力の大きさが不等式

$$\frac{1}{2}F_A \leq F_B \leq 2F_A$$

を満たすときだとすれば，糸と円柱の間の摩擦係数はどれだけか．

P102**　大学一年の数学で積分を学んでいるチャーリーは，演習で，一様な質量分布をもつ半径 R の半円弧について，その質量中心の位置 C を求めようとしている．

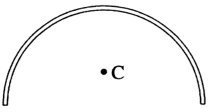


図 P102

妹のジェニーはまだ高校生だが，物理で回転を学んでいる．兄の計算を熱心に見てはいるが，積分を知らないのでほとんど理解できない．彼女にはっきり

わかるのは，問題自体だけである．

しばらく自分で考えたり計算したりしていたジェニーが，「答えがわかったわ．それも半円弧の質量中心の位置だけでなく，円周の任意の部分や扇形の質量中心の位置もわかったわ」と叫んだ．

彼女はどんなことをしたのだろうか．

P103* 高さ 1 m のテーブルの中央に穴があいている．長さ 1 m の細い金鎖のネックレスを，図 P103 に示すように，穴の近くに丸めて置く．

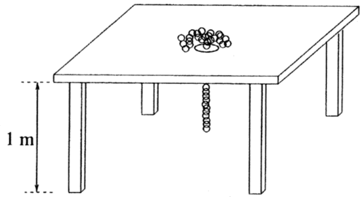


図 P103

鎖の一端を穴から少し引き出し，手を離す．摩擦が無視できる場合には，鎖は穴を滑らかにくぐり抜け，時間とともに速さを増して落下する．鎖の先端と後端が床に着くのは，それぞれどれだけ時間が経過したときか．

P104* 質量が一様に分布した柔らかな鎖が，二つの円筒にたるまないようにかけてある．鎖は陸上競技場のトラックの形，すなわち二つの半円を 2 本の直線で結んだ形をとる．二つの円筒を回転させ，鎖を速さ v でまわす．

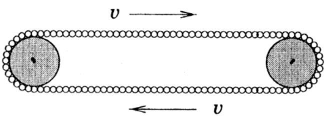


図 P104

何かの理由で鎖が突然円筒からはずれ，鉛直に落下するとしよう．落下の間

に鎖の形はどう変わるだろうか．

スティーブの考えでは，遠心力によって鎖は円形になる．ボブも遠心力は認めるが，彼によると，最初の‘楕円’形が，遠心力の効果で，円を通り越して縦長の楕円（主軸がはじめの主軸と直交する楕円）になるまで変形する．彼は，この過程がくり返し，鎖の形が二つの‘楕円’の間を往復するだろうと考える．フランクは，鎖は元の形を保ち続けるだろうと推測するが，その理由を与えることはできない．誰が正しいか．あるいは3人とも誤っているか．

P105**　図P105に示すように，固定軸のまわりで回転できる軽い滑車に，重く柔らかで伸び縮みしない，長さ L の鎖をほぼ対称にかける．

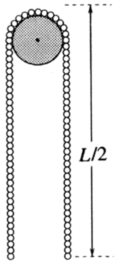


図 P105

鎖が滑車から離れるときの，鎖の速さはどれだけか．（訳注　ここで鎖が滑車から離れるというのは，滑車から力を受けなくなるという意味である．）

P106*　単位長さあたりの質量が ρ の，曲がりやすい長いロープを，一定の力 F で両端から引っ張る．ロープを急に動かすと，ロープの端に丸い輪ができる．横波が伝わるのと同じ具合に，この輪は図P106に示すように，ロープに沿って速さ c で走る（転がる）．

1)　輪の速さ c を計算せよ．

2)　角速度 ω の輪がもつエネルギー，運動量，角運動量を求めよ．これらの量の間にはどのような関係があるか．

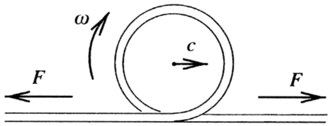


図 P106

P107　速さ $1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ で動く水平なベルト・コンベアの上に，砂が $50\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$ の割合で鉛直に落ちる．

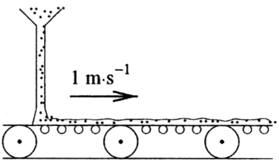


図 P107

ベルトを動かすエンジンに必要な，最低の出力（仕事率）はどれだけか．エンジンがする仕事はどのように説明できるか．

P108**　質量 M，長さ L の消火用ホースを巻いて，半径 R のロールにする（$R \ll L$）．水平な地面の上で，ホースの端を一点に固定し，初速度 v_0（角速度 v_0/R）でロールを転がすと，ホースはまっすぐにほどける．

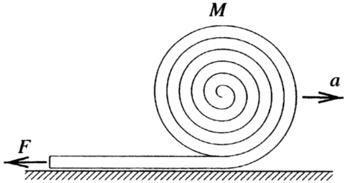


図 P108

1) ホースが全部ほどけるのに，どれだけ時間がかかるか．

2) ロールの速度はだんだん増していくので，加速度 a は明らかに速度と同じ向きのベクトルである．一方，水平方向の外力（摩擦力とホースの端を固定する力）の合力は，これと反対向きである．この二つの事実は，ニュートンの第二法則と矛盾しないか．

（解析の簡単化のため，ロールのはじめの運動エネルギーはポテンシャルエネルギーよりずっと大きいと考えて $\left(v_0 \gg \sqrt{gR}\right)$，重力の効果は無視する．さらに，ホースは十分に柔らかく，それを変形するのに必要な仕事，および空気の抵抗と転がり摩擦は，どれも無視できると仮定する．）

P109　地球の表面と地下 100 km の所では，どちらの重力加速度の方が大きいか．地球は球対称とする．地球の平均密度は $5500\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$，地殻の平均密度は $3000\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ である．（地殻の深さは少なくとも 100 km 以上と仮定してよい．）

P110*　宇宙事故調査局は，次の短い報告を専門家に送った．

“チタンを食べる緑色の小さな宇宙人たちが乗る宇宙船が，完全な球形の小惑星を発見した．彼らは，小惑星の表面 A から中心 O に到る細い試掘坑を掘り，小惑星全体が一様にチタンでできていることを確かめた．このとき第一の事故が起きた．緑色の小さな宇宙人が一人，表面から試掘坑に落ちた．彼は，途中でブレーキがかからずに落下して O に達し，衝突して死亡した．しかし緑色の小さな宇宙人の作業は続き，チタンの採掘が秘密裡に始まった．その過程で彼らは，図 P110 に示すような OA を直径とする球形の空洞をつくった．

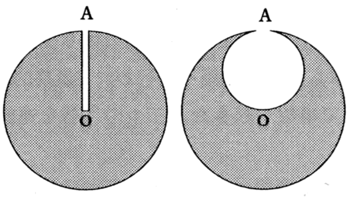


図 P110

ここで第二の事故が起きた．緑色の宇宙人がもう一人，点 A から点 O に同じように落ちて死んだ．”

調査局は専門家に，二人の不運な宇宙人が地底に衝突した速度の比と，A から O まで落ちるのにかかった時間の比の計算を依頼した．専門家は回答でどのような数値を与えたか．

P111* 前問の，チタンを食べる緑色の宇宙人たちは，掘削を続けた．彼らの環境破壊活動の結果，小惑星の半分はまもなく使い尽くされ，図 P111 に示すように，半球だけが残った．掘削した物質は，小惑星から運び出された．

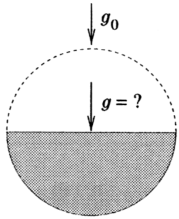


図 P111

残った半球の表面の，円の部分の中心における重力加速度はどれだけか．元の（球形の）小惑星の表面に置ける重力加速度は，$g_0 = 9.81\,\mathrm{cm \cdot s^{-2}}$ であったとする．

P112* チタンを食べる緑色の宇宙人たちは，チタンの小惑星をもう一つ発見した．その半径は 10 km で，質量分布は一様であった．彼らは小惑星の物質を掘り出して表面に運ぶ作業を始めた．金属の掘り出しは，小惑星の赤道に沿う幅 1 m の地帯に，何本も立て坑を掘って行われ，最終的には小惑星は完全に二つに切断された．ここで事故が起きた．二つの半球を連結する支柱が壊れ，小惑星は崩壊した．

宇宙事故調査局は，崩壊直前に支柱にかかっていた合力を計算する必要がある．彼らを助けてほしい．

P113* 半径 R の金属の球面を，中心からの最短距離が h の平面で二つに切る．この球面に，全電荷 Q が一様に帯電している．球面の二つの部分が離れないように押さえておくには，どれだけの力が必要か．

P114 正に帯電した質量 m の小球を，質量が無視できる絶縁性の糸で吊るす．もう一つの正に帯電した小球を，十分遠方から非常にゆっくり近づけ，第一の球があった所までもってくる．その結果第一の球は，高さが h だけ上がる．どれだけの仕事がなされたか．

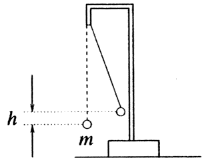


図 P114

P115** 小さな球形の容器に，高圧の気体水素が貯えてある．軽い気球の内部にこの気体を移すと，圧力は外部の大気圧と等しくなる．この状態で，気球が容器を持ち上げることは可能か．気体の温度は一定に保たれると仮定する．

P116 古代の人々は，地球は平らだと考えていた．地球が実際に，半径 R の球ではなく，厚さ H の無限に広い平面だと想像してみよう．重力加速度が，現実の地球表面上における値と同じになるには，どれだけの H が必要か．（地球の密度は一様で，両方のモデルで等しいと仮定する．）

P117 長くて細い絶縁体の棒 AB の上に，電荷が一様に分布している．

任意の点 C において（図 P117 (次ページ) 参照），棒による電場は，角 ACB の二等分線の方向を向くことを示せ．

P118 帯電した長い棒の一端を通る，棒と垂直な面を考える．前問の結果を用いて，この面の上の電場の方向と大きさを求めよ．

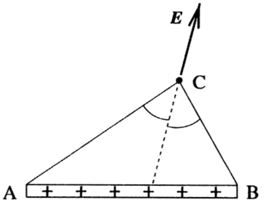


図 P117

P119　19 世紀のはじめ，電流が流れる電線のまわりの磁場は，実験，理論の両面で，物理学の研究の焦点であった．とくに興味を引いた一つの問題は，非常に長い電線を開き角 2θ をなす V 字型に折り曲げたものに，一定電流 I が流れる場合の磁場であった．

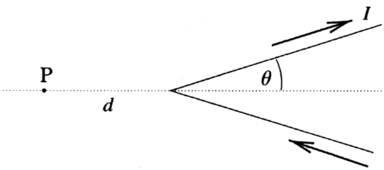


図 P119

アンペールの計算によると，‘V’ の外部の，対称軸上で頂点から距離 d の点 P における磁場の大きさ B は，$\tan(\theta/2)$ に比例する．ところが同じ場合について，ビオとサバールは，P の磁場は θ に比例するという考えを提案した．実際彼らは，磁針の振動の周期を，‘V’ の開口角の関数として測定して，二つの可能性のどちらが正しいかを決めようとした．しかしある範囲の θ の測定では，予言された差は小さすぎて観測できなかった．

1)　どちらの式が正しいか．

2)　この式の比例定数を見出し，また，もう一方の式の比例定数は，どのようなものであったかを推測せよ．

P120**　長さ L，半径 R ($L \gg R$) のソレノイドに直流の電流が流れ，その結果，ソレノイド内部に大きさ B_0 の磁場ができる．

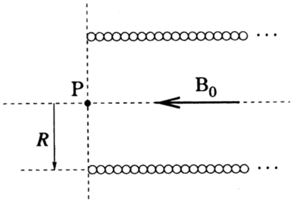


図 P120

1) コイルの端，すなわち図 P120 の点 P における磁場の強さはどれだけか．
2) コイルの端の磁束，すなわち P を中心とする半径 R の円板を貫く磁束はどれだけか．
3) 点 P の付近の磁力線の概略を描け．

P121　接近して置いた 2 枚の 絶縁体 の板の内側の面に，それぞれ電荷 Q が一様に分布している．板を押さえておくにはどれだけの力が必要か．

P122　非常に薄い極板をもつ 2 組の平行板コンデンサーがある．両者は極板間隔だけが異なる．すなわち，一方のコンデンサー AB の間隔は 5 mm，容量は 20 pF で，もう一方のコンデンサー CD の間隔は 2 mm である．極板 A と C は電荷 +1 nC を帯電し，B と D は電荷 −1 nC を帯電している．コンデンサー CD を，極板 A と B の間の中央に，極板どうしが触れないように平行に挿入する．電位差 V_{AB} および V_{CD} はどれだけか．CD の位置が極板 A と B の間の中央からずれると，結果は異なるか．

P123*　極板間隔 d，極板の面積 A の平行板コンデンサーがある．図 P123 に示すように，両方の極板を接地し，一方の極板から距離 x の点に，電荷 Q をもつ小さな物体を置く．

それぞれの極板にはどれだけの電荷が現れるか．

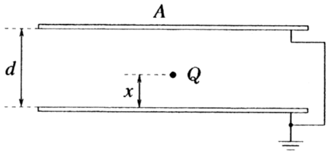


図 P123

P124* 前問で議論したコンデンサーの，接地した 2 枚の極板の間に，点状の電気双極子を置く．その双極子モーメントベクトル $\mathbf{p}$ は極板に垂直で，2 枚の極板からの距離は x および $d-x$ である．

各極板に現れる電荷は x にどう依存するか．(端の影響は無視せよ.)

P125* 領域 $x>0$，$y>0$ の媒質の屈折率が，y によって変化している．x 方向に向かう細い光線がこの領域に直角に入り，媒質中を円弧に沿って進む．

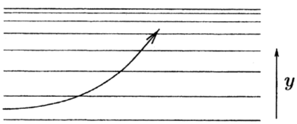


図 P125

屈折率は y にどのように依存するか．円弧として可能な最大の角度はどれだけか．

P126 1 枚のコンパクトディスク (CD) には，ほぼ 650 MB (メガバイト) の情報が含まれる．CD 上の 1 ビットの大きさを，ふつうの物指しを用いて見積もれ．その結果を，レーザー光線を用いて確かめよ．1 単位の情報の形について，何か言うことができるか．

P127 ある光の線スペクトルを調べようとして，1 mm あたり 300 本の回折格子にこの光を垂直入射させたところ，24.46° の所の線が，赤 (640～750 nm)

と青/紫 (360〜490 nm) の両方の成分を含むことが観測された．同様なことが観測される角度が，ほかにもあるだろうか．

P128* 平行で細い単色レーザー光線が，回折格子に垂直に入射する．回折格子を，次の軸のまわりに角度 $\phi < 90°$ 回転すると，スクリーン上の干渉模様はどのように変わるか．

1) 格子の線に平行な軸
2) 格子の線（とビーム）に垂直な軸

P129 液体に浮いている二つの物体は，表面張力の効果で引力を及ぼしあう．これは液体が水であるか水銀であるかにはよらない．なぜそうなのかを説明せよ．

P130* きれいな水槽に入れた水には，図 P130 に示すようなメニスカスが生じる．

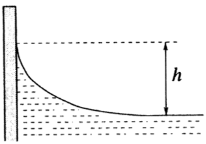


図 P130

メニスカスの中心部と端との高さの差 h を計算せよ．水の表面張力は $\gamma = 0.073\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}$ である．

P131* （球形の）水滴が蒸発する際に，熱を受け取ることもなく，また内部 (熱) エネルギーを失うこともなしにすませることは可能だろうか．

P132** 密閉容器中に，大きさの異なるいくつかの液滴がある．この容器の壁には，その液体は付着しないとする．十分長い時間がたつうちに，小さな液滴はさらに小さくなり，大きな液滴はさらに大きくなる．そして最後には，1個の大きな液滴だけが容器内に残る．この現象はどのように説明できるか．

P133 断熱壁をもつ鉛直なシリンダーが，摩擦のない水平なピストンで二等分されている．ピストンの質量と熱容量は無視できるとする．シリンダーの二つの部分には，標準温度と圧力 p_0 にある空気1モルずつが入っている．

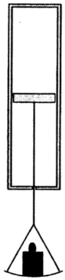


図 P133

ここで図 P133 のように，重さ W の荷重をピストンに吊るす．荷重はピストンを引き下げ，何回か振動した後静止する．シリンダーの下の部分の圧縮された空気は，最終的にどれだけの体積を占めるか． W は非常に重いとする．

P134* 地球上では，山の高さはどこまで高くなり得るか．火星上ではどうか．

P135** 下端は封じ，上端は開いた，高さ 152 cm のまっすぐなガラス管がある．その下半分には空気が，上半分には水銀が入っている．内部の空気をゆっくり加熱するとき，水銀が全部外に押し出されるまでに空気に移る熱量はどれだけか．

封じ込めた空気のモル比熱は，空気の体積の変化に伴いどう変わるか．それを示すグラフを描け．（大気圧は 760 mmHg である．）

P136 アイスランドでは火山活動はごく普通である．一方，国土の 11%は氷河で覆われている．そのため氷河の下での噴火が頻繁に起こる．1996 年 10 月に，ヨーロッパ最大の氷河であるファトナヨクルの下で起きた噴火もその一つである．噴火が起きた場所では，氷河の厚さは 500 m で，表面はほぼ滑らかで

平坦であった．活動開始から1日の時点で，噴火の眼に見える徴候は，氷河表面にできた噴火口状の深い窪みで，それは円錐を逆にした形で，深さは100 m，直径は1 km であった．この窪みの形成を説明せよ．この時点で，氷の噴火口の下には何があったのだろうか．その後に起こる出来事を予測してみよ．

P137* イエローストーン国立公園の間欠泉の中でもっとも有名なものは，オールドフェイスフルである．この間欠泉は，地下にある大きな空洞と，それから地表につながる細い管からなると考えられる．

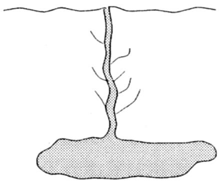


図 P137

周囲の大地は火山活動の名残で温度が高く，空洞中の水を沸騰させる．沸騰状態に達した後，管の中の水は押し出され，4分間に約44トンの水蒸気が間欠泉から出る．噴出の後，地下の泉が，空洞および地表までの管を20～30分かけてふたたび満たす．その後は上の過程がくり返される．噴出は90分ごとに起こる．

地質学的な実験によると，この地域の地下の温度は，1 m 下がるごとに1°C上がる．空洞は，地表から少なくともどれだけの距離の所にあるか．もし空洞がこの最小の深さにあるとすれば，その体積はどれだけか．

P138 ある大きな湖の，水面上の空気の温度は −2°C，水の温度は 0°C である．熱伝導だけが重要だと仮定し，下記のデータの中から必要なものを選んで，湖の表面に厚さ10 cm の氷の層ができるのにかかる時間を概算せよ．

データ：

水の熱伝導率　$\lambda_w = 0.56\,\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$

氷の熱伝導率 $\lambda_{\mathrm{i}} = 2.3\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$

氷の融解熱 $L_{\mathrm{i}} = 3.3 \times 10^5\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}}$

水の密度 $\rho_{\mathrm{w}} = 1000\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$

氷の密度 $\rho_{\mathrm{i}} = 920\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$

P139 冷凍した 5 kg の七面鳥を解凍するのに 2 日かかるとして，8 トンのシベリアマンモスの解凍に，どれだけ時間がかかるかを概算せよ．

P140* 容積 $1\,\mathrm{m}^3$ の，中空の閉じた容器の中に，0.6 kg の氷が入っている．氷と容器の温度はどちらも $-10°\mathrm{C}$ である．ここで容器を $100°\mathrm{C}$ まで加熱する．容器がからの場合と比べ，どれだけ余分の熱を要するか．

P141* 丈夫な壁をもつ容器に，容積の半分だけ水を入れる．残りの半分は空気で，はじめは標準温度，標準圧力の状態にある．容器を密閉し，ゆっくり加熱する．水はいつ沸騰を始めるか．温度を上げていくとき，水はどのような状態にいるか．

P142 どちらも長さ ℓ の 2 本のくもの糸が，温度 T のガラス容器の中に張力 F で張ってある．糸には空気の分子が衝突するため，糸は不規則な振動をする．糸 A が糸 B の 2 倍の質量をもつとすれば，二つの糸の振幅の比はどれだけか．

P143 夜間，屋外で，水蒸気がくもの巣に凝縮することがよくある．その際，同じ大きさの非常に小さな水滴が，糸の上に周期的に並ぶのが見られる．水滴の間の最小間隔を見出せ．

P144* 円柱状の物体が，その中心軸に平行な直線の針金に沿って，摩擦なしに動くことができるとしよう（図 P144 参照）．

速さ v_0 で水平方向に動く多数の微小粒子が，左右から物体に一様にぶつかる．円柱の右端との衝突は完全に弾性的だが，円柱の左端との衝突は完全に非弾性的である．ただし衝突後に，微粒子が円柱に付着することはないとする．次の二つの場合の円柱の速さはどれだけか．

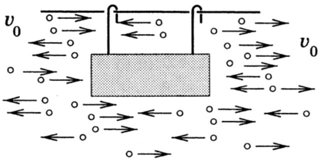


図 P144

1) 長い時間の後
2) 非常に長い時間の後

P145　太陽系から非常に離れた所に，完全に黒い，球形の宇宙探査機がいる．探査機の内部に，単位時間にエネルギー I を発生する核エネルギー源があり，それによる加熱で球表面は温度 T に保たれる．いま，この探査機を，薄い熱保護シールドで囲むとする．シールドは両面とも黒く，何本かの（熱の）絶縁体の棒で探査機表面に取り付けられている．探査機の表面温度はどう変わるか．また，N 枚のシールドで囲むと，表面温度はどうなるか．

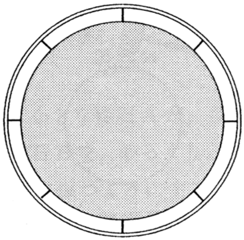


図 P145

P146*　熱的に絶縁された二つの容器の中に，同質量の水が入っている．一方の水の温度は T_1，他方の水の温度は T_2 である（$T_2 > T_1$）．この系を熱機関として用いるときに，取り出し得る最大の仕事はどれだけか．水の比熱は今の作業範囲では定数とせよ．

P147 隣り合って接している 2 モルのヘリウムと 3 モルの酸素が，どちらも s.t.p.（標準温度および圧力，すなわち $T \approx 273\,\mathrm{K}$，$P \approx 1.01 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$）にある．しきりを取り除いて二つの気体が混合するとき，エントロピーはどれだけ変化するか．

P148 10 リットルの容器に空気をポンプでゆっくり押し込み，圧力を大気圧の 10 倍に上げる．ポンプのピストンの排気量が 1 リットルならば，この過程の間にどれだけの仕事がされるか．容器とポンプの壁はどちらも熱の良導体で，温度は一定としてよいとする．

P149 遠方にある惑星が，地球と比べて非常に高い電位の下にある．この惑星に着陸する目的で，金属の宇宙船を地球から送る．この宇宙飛行は危険をともなうか．宇宙飛行士が宇宙船のドアを開け，惑星の表面に立ったとき，何が起こるか．

P150 球面コンデンサーの表面の一部がへこんで，体積が 3%減ると，コンデンサーの容量はどれだけ変わるか．

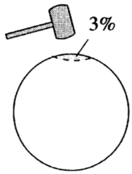


図 P150

P151* 金属薄膜の表面 F をもつ物体が，‘無限に離れた’ 点との間で，静電容量 C をもつ．今，この薄膜をへこませ，図 P151 に示すように，新しい表面 F^* が全部，元の表面の内部か元の表面の上にあるようにする．

変形した物体の容量は，C より小さいことを証明せよ．

P152 ある平行板コンデンサーの極板の面積は A で，極板の間隔ははじめは d である．これを電圧 V につなぐ．極板を間隔 $2d$ に引き離すには，どれだ

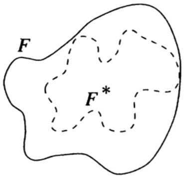


図 P151

けの仕事を要するか．この過程の前後でコンデンサーのエネルギーはどう変わるか．

P153* 図 P153 に示す渦巻きばねの巻数は N，半径は R，長さは x_0，ばね定数は k である．このばねに電流 I_0 が流れると，ばねの長さはどう変わるか．

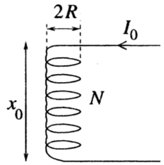


図 P153

P154* 質量 m の非常に小さな磁石 A が，長さ $\ell = 1\,\mathrm{m}$ の紐で水平に吊ってある．別の非常に小さな磁石 B を，ゆっくりと A に近づける．その際，両方の磁石の軸を，常に同じ高さに保つようにする．磁石間の距離が $d = 4\,\mathrm{cm}$ になり，磁石 A がはじめの位置から $s = 1\,\mathrm{cm}$ 離れたところで，A は自分から動いて B にくっつく．

1) 磁石間に働く力が距離 x に依存する仕方は，$F_{\mathrm{magnet}}(x) = \pm K/x^n$ という関係式で与えられる．符号は二つの磁石の相対的な向きによる．与えられたデータから，指数 n の値を求めよ．

2) 底を閉じた鉛直なガラス管に磁石 B を入れる．次に磁石 A を，磁石間に斥力が働くような向きで，ガラス管に入れる．磁石 A は管内で方向を反転しようとしても，管に妨げられてできないとする．静止の位置におけ

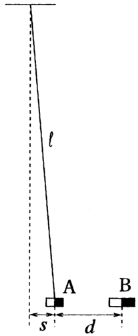


図 P154

る磁石間の距離を求めよ．

P155 N 個の同じセルからなる電池がある．各セルの起電力は $\mathcal{E}$ である．この電池を抵抗を通してコンデンサーにつないでコンデンサーを充電するとき，充電を N 段階に分けて行うと，すなわち，電池全体を一度につなぐかわりに，はじめは 1 個のセルをつなぎ，次に 2 個のセルをつなぎ，というふうにしていくと，エネルギー損失を減らせるという主張がある．これは正しいか．

訳注 一般に電池（battery）は，セル（cell）という単位電池を何個か直列につないでつくる．セルの起電力は電極の種類などから化学的に決まる．

P156 ある‘エネルギー発生装置’は，平行板コンデンサーの極板間の空間をほぼ全部，相対誘電率 $\varepsilon > 1$ の油で満たしたものである．極板に電荷 $\pm Q$ を与えたときに，コンデンサーに貯えられるエネルギーを計算せよ．油は極板には直接触れないようにしてあり，これを流し出し，空気で置き換える．このとき貯えられるエネルギーを計算し，エネルギーが増加したことを示せ．この名案の落とし穴を説明せよ．

P157 平行板コンデンサーの極板間隔と同じ厚さをもつ，相対誘電率 ε_r の

絶縁体（誘電体）の板を，極板の間にゆっくり挿入し，極板間の空間を完全に満たす．コンデンサーの 1) 電荷を一定に保つ場合，および 2) 電圧を一定に保つ場合に，板にはこの過程の間どのような力が働くか．

絶縁体の板は，1) と 2) の場合に，コンデンサーのエネルギーにどのような影響を及ぼすか．

P158　図 P158 のように抵抗を鎖型につないだ，有限な長さの回路網がある．各抵抗の値は 1 Ω である．一番奥の抵抗には 1 A の電流が流れている．

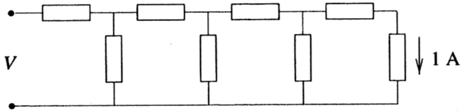


図 P158

この鎖の入力端子の間の電位差はどれだけか．この鎖と等価な抵抗はどれだけか．この鎖に，あと 1 個または 2 個の抵抗を付け加えると，等価抵抗はどう変わるか．この結果を，‘無限に長い’鎖の等価抵抗と比べよ．

P159　図 P159 に示す’無限に大きな’格子の各要素は，同一の抵抗 R である．隣り合う格子点の間の等価抵抗はどれだけか．

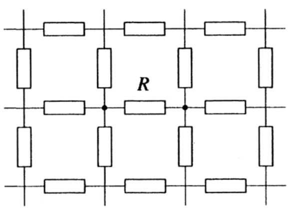


図 P159

また，この格子の各要素が容量 C のコンデンサーだとすれば、隣り合う格子点の間の等価容量はどれだけか．さらに，格子の各要素がインダクタンス L の

コイルの場合には，等価なインダクタンスはどうなるか．

P160* 同一の（たとえば 1Ω の）抵抗を用いて，正多面体（正 4 面体，立方体，正 12 面体など）の形の格子をつくる．隣り合う二つの格子点の間の等価抵抗はどれだけか．

P161 前の 2 問は，同一の抵抗からなる回路網（無限に大きな格子あるいは正多面体）についての計算であった．同じ回路網で，隣り合う二つの格子点を結ぶ抵抗を取り外した場合について，その二つの格子点の間の等価抵抗を求めよ．

P162* ある平面で空間が二分されている．平面の一方の側は導電性の一様な媒質が占める．平面の他方の側にいる物理学者が，平面上に一辺 a の正方形を描き，その隣り合う二つの頂点に小さな電極を埋めて，一方に電流 I_0 を流し込み，他方から I_0 を取り出す．そして残りの二つの頂点の間の電位差 V_0 を測定する．

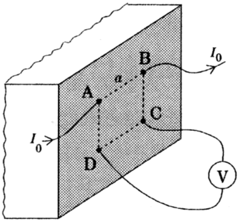


図 P162

このデータを用いて一様な媒質の抵抗率を計算するには，どうすればよいか．

P163* 多数の抵抗やその他の受動的素子からなる，複雑な電気回路がある．回路中のある抵抗の抵抗値を，はんだを溶かさずに（すなわち，その抵抗を回路から取り外さずに）測定したい．高性能の電池，電流計，電圧計が使えるとして，どのような測定をすればよいか．

P164* ある立方体のすべての辺は $1\,\Omega$ の抵抗である．一つの頂点と，中心に関してそれと対称の位置にあるもう一つの頂点をとるとき，その間の，立方体の等価抵抗はどれだけか．

1 次元，2 次元，4 次元の‘立方体’についても調べよ．n 次元の場合の一般式を求めよ．

P165 同一断面の銅線と鉄線の端を溶接してつくった図 P165 のような電線に，電流 1 mA が流れている．

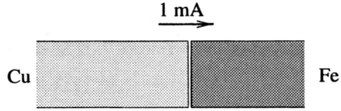


図 P165

両物質の境界には，どれだけの電荷が蓄積するか．これは何個の電気素量（素電荷）に相当するか．

P166 地球の磁場は近似的には磁気双極子の場で，北極では 6×10^{-5} T である．ロンドンでは，磁束密度は 5×10^{-5} T で，伏角は 66° である．

あるジャンボジェット機の翼幅は 80 m，長さは 60 m，高さは 8 m である．速度 $720\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ で水平に飛行するとき，次の場合に，ジェット機表面に検出され得る電位差を概算せよ．

1) 北極の上
2) 赤道上を北進
3) 赤道上を東進
4) ロンドン上空を北西へ

P167 水平から角 α 傾斜した幅 ℓ の線路があり，それと垂直な方向に，磁束密度 $\mathbf{B}$ の一様な場がかかっている．質量 m の導電性の棒が，図 P167 に示すように，両方の線路に摩擦なしでまたがっている．

棒と線路からなる回路を閉じているのが，下の三つの中のどれかのとき，静

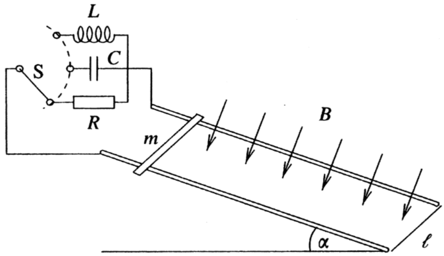


図 P167

止している棒の支えをはずすと，棒はどのように動くか.

1) 抵抗値 R の抵抗
2) 容量 C のコンデンサー
3) インダクタンス L のコイル

P168* 幅が ℓ で抵抗は無視できる水平な線路の一方の端を，容量 C のコンデンサーにつなぐ．このコンデンサーを電圧 V_0 で充電する．回路のこの部分のインダクタンスは無視できる．図 P168 に示すように，この系を磁束密度 B の一様な鉛直磁場の中に置く．

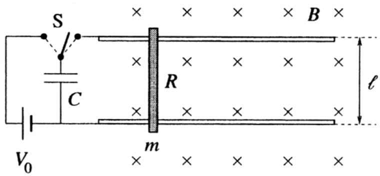


図 P168

質量 m，抵抗 R の摩擦のない導体棒を，線路の上に線路と垂直に置く．コンデンサーの極の向きは，スイッチを入れると棒がコンデンサーから遠ざかって行くようにとる.

1) 棒の最大速度はどれだけか.
2) この‘電磁銃’の効率は，どのような条件の下で最大になるか.

P169　抵抗とコイルを，スイッチを通して電池と直列につなぐ．

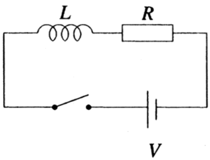


図 P169

スイッチを閉じた後，

1)　コイルに貯えられる磁気エネルギーの増加率が最大のとき，流れている電流の大きさはどれだけか．

2)　抵抗で発生するジュール熱の変化率が最大になるのはいつか．

P170*　1)　図 P170 に示す二つの回路について，電源から流れる電流の大きさを，$x = \omega/\omega_0$ の関数として定性的に描け．ここで $\omega_0 = (LC)^{-1/2}$ である．

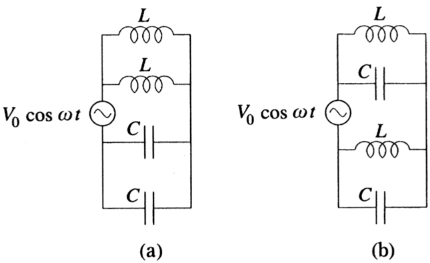


図 P170

2)　図 (a) の部品（すなわちコイルとコンデンサー）を三つあるいはそれ以上用いて，電流共振（ある振動数で電源から流れる電流が最大になる現象）を示す回路を新しく 5 個構成せよ．ただし共振の振動数はすべて異なるようにすること．

P171*　三つの同一な電球と二つのコイルからなる図 P171 のような回路を，直流電源につなぐ．コイルのオーム抵抗は無視できる．

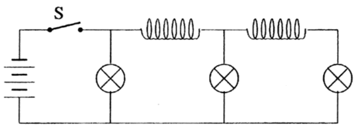


図 P171

しばらくしてからスイッチを開く．その直後の三つの電球の相対的な明るさはどうか．

P172　軸方向の磁束密度をつくる目的のソレノイドで，巻き線を，二つの共軸円筒の間の空間を満たすように巻く．巻き線で発生する熱を最小にするには，用いる電線の直径 d をどう選ぶべきか．

P173*　中までつまった金属円柱が，中心軸のまわりで角速度 ω で回転する．円柱は，中心軸と平行な，一様な磁場 B の中にある．円柱内にはどのような電荷分布が生じるか．電荷密度がいたるところでゼロになるような角速度は存在するか．

P174*　前問の結果を，円柱に固定した回転座標系を用いて考えよう．この回転（非慣性）座標系では，電場と磁場はどうなっているか．（回転の角速度は，サイクロトロン振動数 $\omega_0 = eB/m$ よりずっと小さいと仮定せよ．ここで e は電荷素量，m は電子の質量である．）

P175*　ジルとジャックの二人が，P173 と似た次の問題を考える．P173 の円柱の代わりに，自転車の車輪が一様な磁場の中で回転する．車輪の金属のスポーク中には，どのような電荷分布ができるだろうか．

ジルは P173 の答を知っていて，それをそのまま用いる．すなわち（電子の質量に比例する項は無視して），電荷密度は $\rho = 2\varepsilon_0 B\omega$ だとする．一方，ジャックの解答は，自転車のスポークは細い金属の棒なので，1 次元の問題として扱う．

回転軸から距離 r の点に誘導される電場は $E(r) = rB\omega$ だから，スポークの長さ Δr の微小部分にガウスの法則を適用して，$(\rho/\varepsilon_0)A\Delta r = \Delta EA = B\omega\Delta rA$ を得る．ここで A はスポークの断面積である．この式から彼は電荷密度 $\rho = \varepsilon_0 B\omega$ を導き出すが，これはジルの値の半分である．

上の二つの結果について意見を述べよ．

P176　半径 $r = 0.1\,\mathrm{m}$ の金属の輪が，鉛直な直径のまわりで一定角速度で回転する．図 P176 に示すように，鉛直な軸のまわりで自由に回転できる小さな磁針が，輪の中心に置いてある．

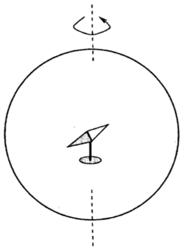


図 P176

輪が静止しているときには，磁針は地球磁場の水平成分の方向を向くが，輪が毎秒 10 回転の割合で回ると，磁針はこの位置から平均 2° 偏る．

輪の電気抵抗はどれだけか．

P177　長さ $2\pi a$，抵抗 r の細い一様な電線の両端をつないで円にする．円周上の，中心角 θ をなす 2 点に（図 P177 参照），小さな抵抗 R をもつ電圧計を，抵抗の無視できる曲がりにくい導線で結ぶ．

円の面と垂直な方向の一様な磁束密度が，$\dot{B}$ の割合で時間変化している．次の二つの場合に，電圧計はどれだけの読みを示すか．

(a) 電圧計が円の中心にある場合

(b) 電圧計が二つの接点を結ぶ弦の上にある場合

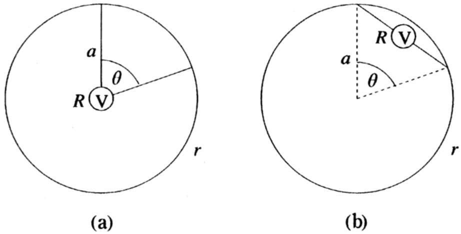


図 P177

P178* 長さ L, 幅 d の紙の帯を，一回ひねって両端をつないだ，円形の帯がある．（これをメビウスの帯という.）この帯のふちに沿う電線を，図 P178 のように電圧計につなぐ.

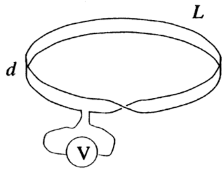


図 P178

時間とともに一定の割合で，すなわち $B(t) = kt$ の形で変化する一様な磁場の中に，この帯を，帯が囲む面が磁場と垂直になるように置く．電圧計の読みはどれだけか.

P179 半径 $2R$ の長いソレノイドの中に，半径 R のもう一つの同軸のソレノイドが入っている．両方のコイルの単位長さあたりの巻き数は同じで，はじめはどちらにも電流は流れていない．ある瞬間から，両方のコイルに，時間に比例して増加する電流が流れ始める．内側のコイルに流れる電流は，常に外側のコイルの電流の 2 倍で，両者の向きは同じである．増加する電流の作用で，二つのコイルの間で静止していた荷電粒子が，円軌道に沿って動き始める．円軌道の半径 r はどれだけか.

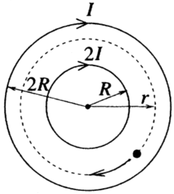


図 P179

P180　質量 m をもつ細い絶縁体の輪の上に，電荷 Q が一様に分布している．はじめ輪は静止している．輪の面と垂直に磁場 B をかけると，輪は中心軸のまわりで回転を始める．最終の角速度はどれだけか．

P181*　まっすぐな長いコイルの中で，半径 r の金属の円板が，コイルの中心軸と平行な回転軸のまわりで，摩擦なしで回転することができる．コイルの電線の一端は円板のふちに接し，他方の端は回転軸につながっている．コイルは抵抗 R をもち，単位長さあたり n 巻きの割合で巻いてある．コイルは，中心軸が地球の磁場ベクトル $\mathbf{B}_0$ と平行になるように置いてある．

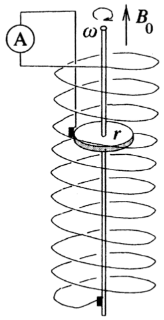


図 P181

円板が角速度 ω で回転するとき，図 P181 に示す電流計にはどれだけの電流が流れるか．電流を（回転の両方の向きについて）ω の関数としてグラフに描け．

円板を回転させるのに必要な仕事率は，コイルで単位時間に発生するジュール熱に等しいことを証明せよ.

P182* 超伝導体の（すなわち抵抗ゼロの）細い輪を，図に示すように円柱状の鉛直な棒磁石の上端近くで支える．輪の中心軸と棒の中心軸は一致している．輪の付近の円筒対称な磁場を近似的に表すには，磁場ベクトルの鉛直方向成分を $B_z = B_0(1-\alpha z)$，動径方向成分を $B_r = B_0 \beta r$ とおけばよい．ここで B_0，α，β は定数，z と r は鉛直方向および（円筒座標の）動径方向の座標である.

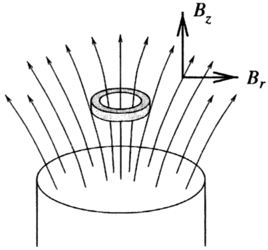


図 P182

はじめは輪に電流は流れていない．輪の支えをはずすと，軸を鉛直に保ったまま，輪は下に動き始める．下記のデータから，その後の輪の運動を定めよ．輪にはどのような電流が流れるか.

データ：

輪の性質：	質量	$m = 50\,\mathrm{mg}$
	半径	$r_0 = 0.5\,\mathrm{cm}$
	インダクタンス	$L = 1.3 \times 10^{-8}\,\mathrm{H}$
輪の中心の初期位置：		$z = 0$
		$r = 0$
磁場の定数：		$B_0 = 0.01\,\mathrm{T}$
		$\alpha = 2\,\mathrm{m}^{-1}$
		$\beta = 32\,\mathrm{m}^{-1}$

P183* 　電荷を帯びた小さなビーズ球が，円形の，摩擦のない，絶縁性の輪の上を滑る．円の中心には，点状の電気双極子が固定されている．双極子の軸は円の面内にある．はじめビーズは，図 P183 に示すように，双極子の対称面の上にある．

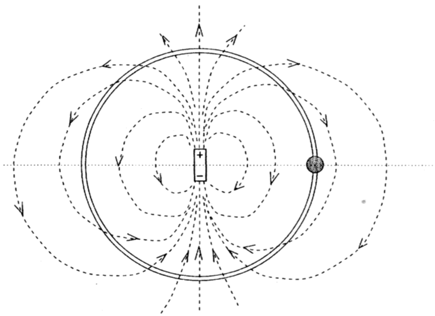


図 P183

ビーズの支えをはずすと，ビーズはどう動くか．輪がビーズに及ぼす法線方向の力の表式を求めよ．ビーズが動き出した後，最初に止まるのはどこか．輪がなければ，ビーズはどのように動くだろうか．電気力は重力よりずっと大きいとして，重力の影響は無視せよ．

P184* 　一様な重力場の中で，質量 m，電荷 q の点状の物体を支えて静止させる．物体には水平方向の一様な磁場も働く．物体を自由にすると，物体はどのような軌道上を動くか．

P185* 　外側の半径が r の長い鉛直なガラス管の内部に，それよりずっと細い同軸のガラス管が入っている．外側の管には，抵抗 R の導体の円輪が，間隔 h ごとに多数巻きつけてある．

質量 m，磁気モーメント μ の小さな棒磁石を内側の管の内部に落とすと，棒磁石の速度は比較的短時間で一定の最終速度 v_0 に達し，その後はその速度で落下する．

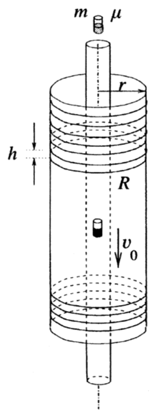


図 P185

上であげた五つの量，すなわち（m，μ，h，R，r）のどれか一つの値だけを 2 倍にし，残りの量の値は元のままに保つと，磁石の最終速度は，各場合に何倍になるか．機械的摩擦および空気の抵抗は無視し，また導体の輪の自己インダクタンスおよび相互インダクタンスも無視する．

P186* 内部が真空の容器中で，導電率の非常に高い直線の電線に，電流 10 A が流れている．電線から距離 r_0 離れた点から，電子が電線に向かって，電線と垂直な初速度 v_0 で動き始める．電子が距離 $r_0/2$ 以内には電線に近づくことができないとすれば，v_0 はどれだけか．地球磁場の効果は無視せよ．

P187* 極板間隔 d の，帯電していないコンデンサーがある．極板と平行な方向に，強さ B の磁場がかけてある（図 P187 参照）．相対誘電率 ε_r の電気的に中性な流体が，極板間を磁場と垂直な方向に速度 v で流れるとき，極板間につないだ電圧計はどれだけの電圧を示すか．

P188 ウラン原子核の核分裂で，原子核が二つではなく三つに分裂すれば，放出されるエネルギーはもっと大きいだろう．にもかかわらず実際のウラン核分裂では，二つの原子核しかできない．それはなぜだろうか．

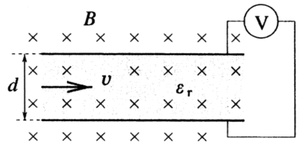


図 P187

P189* ^{7}Be は，半減期 53.37 日の放射性元素である．このアイソトープ（ベリリウム 7）を数千度に加熱すると，半減期が変化する．この事実はどのように説明されるか．

P190* 下に記したのは，トリウム 232 の崩壊でつくられるアイソトープ（同位元素）の系列の一部と，その半減期である．

$$^{232}_{90}\mathrm{Th} \underset{1.41\times10^{10}\,\mathrm{y}}{\longrightarrow} {}^{228}_{88}\mathrm{Ra} \underset{5.7\,\mathrm{y}}{\longrightarrow} {}^{228}_{89}\mathrm{Ac} \underset{6.13\,\mathrm{h}}{\longrightarrow} {}^{228}_{90}\mathrm{Th}$$

$$\underset{1.91\,\mathrm{y}}{\longrightarrow} {}^{224}_{88}\mathrm{Ra} \underset{3.64\,\mathrm{d}}{\longrightarrow} {}^{220}_{86}\mathrm{Rn} \underset{56\,\mathrm{s}}{\longrightarrow} \cdots$$

ある鉱石から，放射平衡にあるトリウム 232 とトリウム 228 を，化学的な方法で（他の元素と）分離した．この物質 10^{-3} kg の中にあるラドン 220 原子の数が，10^{-3} 年から 10^3 年までの（対数的な）時間範囲で変化していく様子をスケッチせよ．

P191 加速した陽子を静止した陽子に衝突させて，陽子・反陽子対の発生を可能にするには，陽子をどれだけの電圧で加速しなければならないか．陽子の静止質量エネルギーは約 1 GeV である．

P192* ファラデー・ケージの内部に，陽電子（ポジトロン）を初速度なしで‘落とす’と，陽電子はどのように動くか．陽電子を，電場および地球の重力場から力を受ける古典的粒子と考えよ（図 P192 (次ページ) 参照）．

P193* 一辺 $a = 1$ cm の正方形の相対する二つの頂点に，陽電子を一つずつ置き，残りの二つの頂点には，陽子を一つずつ置く（図 P193 参照）．

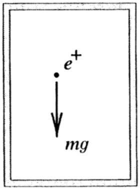


図 P192

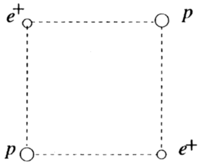


図 P193

はじめは粒子を上の位置に固定しておき，ある時刻に全粒子を自由にする．粒子が十分に離れたときの，粒子の速度はどれだけか．これらの粒子は，他の粒子がつくる電場中で動く，古典的な質点と考えることができる．重力は無視できる．

P194　コンプトン散乱の実験で，電子の静止エネルギーと等しいエネルギーをもつ光子を，静止している電子に衝突させる．散乱された光子と反跳電子（はじき飛ばされた電子）が同じ大きさの運動量をもつときの，両者の間の角度を求めよ．この場合の反跳電子の速度はどれだけか．

P195　はじめは静止している電子に X 線の光子があたり，光子は角度 90° 散乱されるなら，光子の波長はどれだけ変わるか．

P196　‘古典的電子’ を小さな球面とみなそう．静電エネルギーが静止エネルギー mc^2 を越えないとすれば，最小半径はどれだけか．電子の角運動量が $h/4\pi$ なら，角速度はどれだけか．電子の静止エネルギーが全部静電場によるものならば，上の角速度のときの ‘赤道の速度’ はどれだけか．

P197*　電子を 1 個，大きな直方体の箱に入れる．重力の効果で，電子は箱の底付近の層の中にいる．その層の厚さを概算せよ．

P198*　古典的には，原子核のクーロン場によって，電子を原子核内部に閉じ込めることが可能にみえる．しかしハイゼンベルクの不確定性原理は，そのような狭い空間に閉じ込められた電子には高い運動エネルギーを指定するの

で，電子は結局は原子核から逃げ出してしまうだろう．超ウラン元素の原子核が，電子を原子核内部にかなりの時間閉じ込めておけるとすれば，その元素の原子番号はどれだけ以上か．ただし原子核自身は十分に安定とする．

P199* 水分子の大きさを，水の表面波（表面張力波）の速度と水の中の音速を用いて見積もるには，どうしたらいいだろうか．波長 1 cm の水の表面波の伝播速度は，水中の音速よりも，約 10,000 倍おそい．

P200 おめでとう！ 読者は本書の最後の問題に到達した．読者を祝福するのにふさわしい仕方は，シャンパンで健康を祈念することだろうが，残念ながらこの表彰の仕方は現実的ではない．しかし最後の問題をシャンパンの問題にすることならできる．

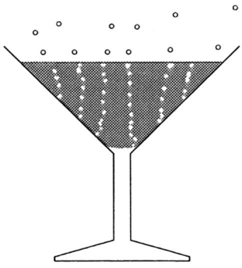


図 P200

シャンパンの泡はなじみ深いだろう．泡はほとんど例外なく，シャンパン・グラスのいくつかの特定の点ででき，上に上がるほど速度を増す．シャンパンの泡は，なぜ加速するのだろうか．

ヒント

H1　かたつむりの速度ベクトルを適切な成分に分けよ．分け方は一通りではなく，それにより考え方は変わるが，解は同じである．軌跡の方程式は，速度の極座標表示を使って求めることができる．

H2　物体が机の上で止まらない場合の，摩擦係数の最大値を計算せよ．

H3　1) の場合には，ボートが川の流れより速いから，答えはすぐわかる．2) の場合には，ベクトルの加法をうまく使えば，ボートが進める方向がどの範囲にあるかが決まる．その中から，最短距離の経路を与える方向を選ぶ．

H4　（じゅうたんの）動いている部分は全体が単位速さをもつが，質量中心の速さはそれより遅い．その理由は，動く部分の質量が増大しているからである．

H5　かたつむりの時空の‘世界線’を描いてみよ．異なる慣性系が等価であること（ガリレイ対称性）を使っても結果は得られる．

H6　2 匹の虫について，重心がどれだけ上がるかを比べよ．

H7　エネルギー保存則と平衡条件から答えが求められる．

H8　氷山を微少距離 x だけ押し下げるとき，海面下の体積がどれだけ増えるかを求めよ．氷山の質量 M と氷山の大きさの関係を与えるために，つり合いの条件を用いよ．

H9　歩道に乗り上げて駐車しても，サスペンションばねの張力の和は変わらない．また任意の軸に関するトルクの和はゼロでなければならない．

H10　解答の核心は，摩擦力が，ジャン・ヴァルジャンの重さと壁の抗力の両方とつり合うことが，どういうふうにできるのかを理解することである．

H11　合成した球の幾何学的中心と質量中心の間の距離は，ある限界を越えることはない．この限界の距離を求めよ．

H12　ボールの運動を、斜面と直交する方向と平行な方向の成分に分けて記述せよ.

H13　ハムスターの運動の加速度のために，ハムスターは台に力を及ぼす.この力によるトルクが，ハムスターの重さによる軸のまわりのトルクとつり合うことができる.

H14　実際に自転車で試してみよ.

H15　ニュートンの重力の法則を用いよ．太陽の質量をその平均密度で表せ.

H16　連星の一方の星が他方の星の位置につくる重力場を，地球に働く太陽の重力場と比べよ.

H17　宇宙探査機は，赤道上から東向きに打ち上げるのが望ましい.

H18　問題になるエネルギーを調べよ.

H19　蜂蜜と鉄球からなる系の質量中心は，一定の速さで下降する．系の全運動量は質量中心の速さを用いて計算でき，蜂蜜の運動量はこれから鉄球の運動量を差し引いて得られる.

H20　容器の壁の温度と気体の温度が異なると，気体分子と壁の衝突の際，分子は壁からエネルギーを受け取るか，または壁にエネルギーを与える.

H21　2 球の間の温度差は，球の質量中心が反対向きにずれることから生じる.

H22　本書の読者にはヒントはいらないだろう.

H23　ブラック・ボックスは実現可能．それも抵抗二つだけでできる.

H24　バケツと水の全体の重心が，水漏れによりどう変わるかを調べよ.

H25　水を少し加えると全体の重心が必ず高くなるのは，どんな条件のと

きか.

H26 水はボウルに入らない. これを証明するためには, 鎖が及ぼす力とトルクの両方の効果を考えなければならない.

H27 解の中でふつうと異なる部分は, 浮力の計算だけである.

H28 シャボン玉が浮かんでいるので, シャボン玉の平均密度は空気の密度に等しくなければならない.

H29 毛細管の端では, 曲率の圧力（訳注　表面張力による力）が, 液体内部の圧力と大気圧の差とつり合う.

H30 全系（電流分布と電場）は球対称なので, 磁場も球対称でなければならない. どんな球対称磁場が, 磁気単極子が存在しないという観測事実と両立するかを考えよ.

H31 電荷分布の対称性を用いよ.

H32 単純に重力加速度を比較するだけでは不十分である. 高跳びの選手が, 同じ初速度で跳び上がれるかどうかが, わからないからである. 跳躍の間の, 選手の質量中心の運動を解析する必要がある.

H33 運動の経過時間と経路の長さを, 正確に求める必要はない. これらの量についての不等式だけを定めればよい.

H34 紐の張力を円軌道の法線方向と接線方向の成分に分解すると, 紐の方向は, 等速円運動についての力学的条件を使って計算できる.

H35 同一の点を同時に出発して, 異なる方向の摩擦のない針金を滑り落ちるすべての物体は, いつも共通な（仮想的）球面上にいることを証明せよ.

H36 長針に固定した回転座標系を用いれば, 問題は初等的に解ける.

H37　石の速度ベクトルの，位置ベクトルと平行な成分がゼロになるまで，石は投げた人から離れ続ける．もしゼロになることがなければ，問題の条件が満たされる．

H38　（最小速度で跳び上がるときの）キリギリスの軌跡は軌跡の頂点で丸太に触れる，という仮定は誤りである．

H39　2匹が直接相手を目指して跳べば，事故が起きるのは明らかである．対称性を維持しながら，これ以外の向きに跳ぶことを考えよ．髪の毛の質量が与えられていることに注意せよ．

H40　水流に共通な表面，すなわち包絡面の形を決める必要がある．水流は同じ場所から同じ初速で出発し，放物線の経路をたどる．空間中の任意の点について，そこを通過する水流があるかどうかを判定する条件を調べよ．

H41　到達距離は

$$\frac{v^2}{g}\left[\sin 2\theta + \frac{EQ}{mg}\left(1 - \cos 2\theta\right)\right]$$

であることを示し，θ についてその最大値を求めよ．

H42　両指が棒に及ぼす垂直抗力は，一般には等しくない．ゆえに最大静止摩擦力はどちらかの指の方が小さく，そちらの指でまず滑り始める．しかし滑る方の指の垂直抗力は増加していくので，そこの動摩擦力は増加する．そしてこの動摩擦力がもう一方の指の静止摩擦力を越えた瞬間に，これまでの指の滑りは止まり，他方の指で滑りが始まる．本問の過程では，両方の指が交互に滑りと止まりをくり返す．なされる仕事は，各段階の長さから計算できる．

H43　ずらす過程は一番上から始めるべきである！　一番上の煉瓦をできるだけせり出させ，次に同じことを上の2個をひとかたまりとして行い，以下それを下まで続ける．これが正しい戦略である．

H44　板に働く力およびトルクのつり合いを用いて，摩擦力の間の関係を見出せ．その結果導かれる連立1次式はグラフで扱うとよい．

H45　この過程は，連続した一連の衝突と考えねばならない．

H46　第一の衝突で，最初の球から中央の球へ渡される運動エネルギーの割合は，$4\mu M/(\mu+M)^2$ であることを示せ．

H47　衝突の間，系の運動量，エネルギー，角運動量はすべて保存される．

H48　運動を，質量中心の運動と，質量中心系における運動に分解せよ．エネルギーと角運動量の保存の考察から，綱が最初にぴんと張るとき，質量中心系での 2 物体の速度は，大きさは変わらないが向きが $\pi/2$ だけ変わり，その結果 2 物体は（質量中心系の）x 軸に平行に動き出すことを示せ．

H49　ふつうの議論では，容器の 1/3 が 1 分間で満たされ，同じ時間で容器の 1/2 が空になる（それゆえ容器の $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ が 1 分間で空になる）と仮定するが，これは誤りである．水は注水口から容器に一様に流れ込むが，流れ出す速さは（流出に関するトリチェリの定理により）容器の中の水位が高いときほど速い．

H50　自由表面は，回転放物面 $z=\omega^2r^2/2g$ の一部であることを示せ．ここで z は自由表面の最低点から測った高さ，r は中心軸からの距離である．容器内の，液面の上にある空気の体積を考えよ．

H51　力学的な意味で，車は閉じた系では<u>ない</u>．外界（この場合は地球）と接触している．

H52　焦点距離は，レンズの公式と倍率の間の関係を使うと求められる．明るさの値の比は，像の大きさだけではなくレンズを通る光量にもよる．

H53　虚像の見かけの大きさは，像自体の大きさで決まるのではなく，像が眼に対して張る角で決まる．

H54　光線がプリズムに入る点で，光線とプリズム面の法線がガラス内部でなす角を ϕ とするとき，$n_{\mathrm{g}}\sin(\theta+\phi)\geq n_{\mathrm{w}}$ を導け．

H55　四分円柱のすぐ近くにも，非常に離れた所にも，光は来ない．近い所に光が来ないのは，全反射のためである．光が達するもっとも遠方の点は，四分円柱の机に近い部分を，平凸レンズとみなして求めることができる．

H56　月面に当たる太陽の光は，与えられた反射率で乱反射するとせよ．その中のどれだけが，地球の単位表面積に到達するかを計算せよ．

H57　歩くときのもっとも快適な速さは，人の脚が振り子のように自由に振れるときの周期に結びつけることができる．走ることは強制振動とみなせる．このときの周期は，脚の慣性モーメントと，筋肉が及ぼすトルクに依存する．

H58　問題に与えられた棒振り子と，すべての位置で同じ角速度をもつような単振り子が，長さを適切に選べばつくれる．この振り子と，問題に実際に与えられた単振り子の，振れの周期を比べよ．長さの異なる二つの単振り子を，同じ角度で放したときの周期の比は，次元解析を使って導ける．

H59　ホバリングに必要な出力が，どのような物理量に依存するかを考えよ．

H60　エネルギー保存則を用いて，棒の傾き角が θ のときの棒の角速度 ω を決めよ．机と棒の間に働く力の成分を，それがつくる加速度と結びつけよ．1) の場合には，段差の床と壁は滑らかで，水平な床は棒の端に鉛直な力だけを及ぼし，鉛直な壁は水平な力だけを及ぼす．2) の場合には，机の端は非常に小さな四分円なので，その垂直抗力は常に棒の軸方向を向く．

H61　摩擦係数が小さければ，鉛筆の先端は‘後ろ向き’に動く．摩擦係数がある臨界値（約 0.37 であることが示せる）より大きければ，先端は‘前向き’に動く．動摩擦力が力学的エネルギーを減らすという事実を用いると，鉛筆の先端は机から決して離れないことが示せる．

H62　空気の質量保存を表す式で，理想気体の状態方程式を用いよ．また，十分時間がたった後では，系の温度ははじめと変わっていないことに注意せよ．

H63　水の表面張力（曲率による圧力）のため，閉じ込められた水の中の圧

力は大気圧より低い.

H64 任意の時刻における，糸の上の各点の速度を計算せよ.

H65 糸に固定した（‘弾性’）座標系を考えよ.

H66 簡単な（つまり数学的に扱いやすい）軌道で，軌道の長さは最短距離より長いが，球が達する速さが速いため，結局，かかる時間が短縮されるようなものを，一つ見出せ.

H67 テキストには与えられていない角度を，図から決めることができる.

H68 コンパスの重心は，糸をとりつけた点の真下にある. そのため脚の開きの角度を変えても，それぞれの脚の重心の位置は動くが，全体の重心の水平位置は元のままである. この議論を使えば最小限の計算で問題の答えがみつかる.

H69 つり合いの条件をベクトルで表せ.

H70 系全体としては，水平方向の外力を受けていないことに注意する. そのため系の質量中心は動かないが，そのほかに，運動量の保存則を使う必要がある. タンク車は最初前方に動き，それから動く向きを変えることが示せるはずである.

タンク車が運動の向きを変えるのは，意外かもしれない. そこで，もとの問題の前に，次の問題を考えると役に立つかもしれない.

どちらも質量 m をもつ，貧乏学生と仕事熱心な検札係の車掌とが，摩擦のないレール上で静止した質量 M の客車に乗っている. 車掌に切符を持っていないことを気づかれた学生は，客車の最後部めがけて走り始め，それを車掌が，客車に対する速さ v で追いかける. 学生は客車の最後尾まで来るとそこで止まり，外へ飛び降りる. 車掌は開いたドアまで来て立ち止まり，逃げていく学生をみつめる. このときの客車の速度はどれだけか.

H71 二つのビーズの質量中心系で考えよ.

H72　完全非弾性衝突の場合には，ビーズはだんご状態になって質量が増え続け，十分長い時間がたつと一定の速さに達する．このビーズのかたまりに対してニュートンの運動法則を適用せよ．弾性衝突の場合には，外力が働くのが最初の衝突が起きるまでならどうなるかを，まず考えてみよ．

H73　テーブルとジョッキとビールからなる系の重心がどうなるかを考えよ．

H74　水の粘性は小さいとしてよい．また液体のポテンシャルエネルギーの変化は，運動エネルギーに比べて無視すべきである．樋は水流の運動量の水平方向成分を変えることはできないこと，ベルヌーイの式が使えることに注意せよ．

H75　最初静止していた液体がはじめ，加速度 a で動き始めるとして，非常に短い時間 Δt の間の，位置エネルギーと運動エネルギーの変化を表す式を求めよ．

H76　経験によれば，くびれの部分を砂が通過する速さは，砂時計の上の部分にある砂の量にはよらない．これは次のように説明できる．砂粒どうしの摩擦のために，下に落ちてくる砂の平均速度は，その近くの条件，おもに穴の直径だけによって決まり，離れた場所に起因する効果にはよらない．（液体の場合にはこれは正しくない．圧力は長距離を伝わるからである．P49 を参照.）それゆえ，砂が穴を通過するのに必要な時間は，砂の最初の高さ H の 3 乗に比例しなければならない．この時間が依存する他の量も見出し，その上で次元解析の方法を適用せよ．

H77　変位が小さいときには，おもりに働く力は $F(x) \approx -kx^3/\ell_0^2$ である．ただし k はばね定数である．次元解析を使うと，ばね定数，おもりの質量，および振幅に，周期がどう依存するかを導き出せる．

H78　与えられた条件の下では，物体の鉛直方向および水平方向の運動は，どちらも調和振動で近似できる．

H79　（減速している）貨車の座標系で運動を記述せよ．

H80 三角柱に固定した座標系で運動を調べよ．

H81 どんな条件があれば，長い細紐が赤道の上で，自転と同期した軌道上を（つまり地球と同じ角速度で）等速で運動するだろうか．

H82 車の加速度の法線方向成分は $a_n = v^2/\rho$ である．ここで v は車の速さ，ρ は橋の曲率半径である．曲率半径は放物運動を考えて導ける．物体は橋の表面と同じ形の軌道を運動するからである．

H83 トラックの曲率半径を決めることが，解の核心である（H82 参照）．

H84 任意の時間間隔に対して，水がボートを下流に押し流す距離と，目印までの距離の減少分は同じである．

H85 押された子供の速さと斜面に沿う速度成分は，それぞれ単位時間にどれだけ変わるかを計算せよ．この二つの変化率の間の関係を見出せ．

H86 密輸船から沿岸警備艇までの距離が減る速さと，警備艇が海岸から遠ざかる速さとを比較せよ．

H87 問題の対称性から，物体は縮小を続ける正 n 角形の頂点に常にいて，あたかも各物体が，多角形の中心にある一つの（適当な質量 M_n の）物体だけから力を受けているような動き方をする．系が中心の一点につぶれるまでの時間は，ケプラーの第三法則を使って計算できる．

H88 問題を解くには，惑星の運行に関するケプラーの三法則をすべて使う必要がある．

H89 磁気双極子による磁場は，極軸上（ガウスの A 位置）では $B_{\parallel} = 2\kappa\mu/L^3$，赤道上（ガウスの B 位置）では $B_{\perp} = \kappa\mu/L^3$ であることを思い出そう．ここで $\mu_0/4\pi$ を κ と記した．

H90 電荷に作用する力は，いわゆる鏡像法で求められる．重力（万有引力）と同じように，その力は距離の 2 乗に反比例する．したがって物体の運動は，

つぶれた楕円軌道の上の，ケプラーの法則で記述される運動と同じである．

H91　鏡像法を使って，球の下の領域の電場と，誘導表面電荷の面密度の値を求めよ．塩水表面に働く静電気力による‘負の圧力’は，水の‘こぶ’による静水圧とつり合う．

H92　球面鏡像電荷の方法を利用せよ．この方法の基礎は，符号が反対で大きさが異なる二つの点電荷による電場では，電位ゼロの等電位面が球面になるという事実である．

H93　実験室系と質量中心系の両方の座標系を使う必要がある．

H94　運動の経過をスローモーションで再現したとすると，衝突の直後には，第一の球は止まってその場所で回転するのに対して，第二の球は回転せずに動き始めるのが見られるだろう．したがって，衝突によって第一の球から第二の球へ運動量は渡されるが，角運動量は移動しない．

衝突の後，第一の球は摩擦によって前進するが，回転は遅くなる．一方，第二の球の並進運動は摩擦によって遅くなるが，回転は速くなる．それ以後は，それぞれの球の，テーブルとの接触点のまわりの角運動量は一定に保たれる．

H95　エネルギー保存を考えよ．ただし熱として失われる分も忘れないこと．

H96　テーブル上で球が通る経路の上の任意の点をとり，その点に関する球の角運動量を調べよ．

H97　問題になるのは，自動車の交通による運動量の東西成分だけであることを理解せよ．

H98　問題を解くには，運動方程式に加えて，並進運動の加速度と角加速度の関係がかぎになる．

H99　エネルギーと運動量については系は閉じていないので，これらの量は保存しない．角運動量の保存が，問題にある不思議な現象を説明することがで

きる．

H100 回転軸に対し角度 $\Delta\theta$ を張る，輪の微小部分（円弧）に働く力を考えよ．

H101 円柱の表面の，方位角が $\Delta\alpha$ だけ異なる 2 点で，円柱に沿って糸を引っ張る力の差 ΔF を求めよ．この力の差は円柱に働く法線方向の力に比例し，法線方向の力自身は F に比例する．ある量の変化の速さがその量自身に比例する現象（放射性崩壊やコンデンサーの放電など）を考え，それとの類推を用いると，糸の摩擦にあてはまる関係が得られる．

H102 ジェニーがチャーリーにすすめるのは，中心軸のまわりを一定角速度で回転する，一様な輪を考えることである．輪の内部でどのような力が働いているか，そして輪の一部分の質量中心に対して，ニュートンの第二法則がどのように成り立つかを考えるのである．（訳注　ここで言う回転は，滑らかな水平面の上に置いた輪が，鉛直な中心軸のまわりをまわる運動である．）

H103 重力は，今吊り下がっている部分を加速すると同時に，静止している次の輪を急激に動き出させる．それゆえ，動いている鎖の質量が変化することを，考えに入れねばならない．

H104 鎖の質量中心とともに動く座標系では，重力は無視できる．この座標系では鎖の重さはなくなるが，質量がなくなるわけではない．鎖の微小部分の極率半径が R で，一定の速さ v で動いているとき，この微小部分にはどの方向の力が働くかを調べ，それに基づいて，鎖の形がどのように変形するかを定めよ．（P100，P101，P102 も参照せよ．）

フランクの予想が正しく，鎖は元の形を保ち続けることを示すことができる．

H105 鎖が滑車を離れるときの，鎖内部の張力を計算せよ．エネルギー保存則を用いよ．（P104 も参照．）

H106 輪の運動を，輪の中心と同じ速度 c で動く座標系で調べよ．この座

標系では，輪の各部分は等速円運動をする．円運動に対する力学的条件から c に対する式がでる．

H107　ベルト上の砂がもつ水平方向の運動量の，単位時間あたりの変化を調べよ．関連するエネルギーについての考察も役に立つ．

H108　エネルギーの保存則を適用せよ．位置の関数としてのロールの速度から運動量を計算し，その変化から力を見出せ．

H109　質量が一様に分布した薄い球殻による重力場は，球殻の内部ではゼロで，外部では，球殻の全質量が中心に集中したときと同じである．

H110　一様な球の内部の重力場は，中心からの距離に比例する（P109 参照）．空洞ができた球の重力場は，一様な球の場と，‘負の質量密度’ をもつ小さな球の場の重ね合わせで求めることができる．

H111　半球を，同じ厚さの半球状球殻に分割する．これらの球殻は，問題の点にどれも同じ重力場をつくることを示せ．

H112　‘神話の巨人’ が，小惑星の二つに切断された部分を 1 m まで引き離すのに，どれだけの力を要するかを計算せよ．

H113　球面の二つの部分に電場が及ぼす力は，切断面の面積に比例し，切断面と垂直な方向を向く．この力が，液体や気体の圧力による力に似ていることに注意せよ．

H114　一見，いくつかのパラメーターが足りないようだが，心配せずに平衡条件を見出し，その状態での系の静電エネルギーを計算せよ．

H115　最初に容器につめることができる気体水素の，容器が破裂しない範囲での最大量を見出せ．容器の材料は，実在する材料から自由に選んでよい．

H116　重力場と静電場の法則は非常によく似ている．このことを用い，ガウスの法則を応用せよ．

H117 点Cに対して角 $\Delta\alpha$ を張る棒の微小部分を考え，その電荷がつくる電場について調べよ．

H118 2本の非常に長い棒の端と端をつないでできる棒を考えよ．

H119 正しい式と誤りの式は，θ が π に近づく場合を考えれば区別できる．電流が流れている長い直線状電線の磁場についての周知の表式により，比例定数を見出せ．

H120 同じコイルをもう一つ，点Pにおいてはじめのコイルと対称につなぎ，この第二のコイルにも同じ電流を流す場合を想像して，重ね合わせの原理を適用せよ．

H121 一方の板の正電荷を，同じ大きさの負電荷に変えた場合を考えてみれば，力は容易に求められる．

H122 孤立した極板上の全電荷は変化できないことに注意する．

H123 点電荷 Q を，下の極板から距離 x 離れた平面の上に一様に広げても，それぞれの極板に誘導される電荷の量は変わらないだろう．

H124 2枚の極板より外部の電場は，厳密にゼロでなければならない．この周知の事実から，電荷分布についてどのような帰結が得られるか．

H125 媒質を y 軸に垂直な薄い層に切り分けてみる．各層は屈折率の異なる板と考えることができ，層の屈折率と光線の入射角の関係を求めることができる．

H126 簡単な幾何によって，CD上の使える面積が計算できる．要求されている結果を得るには，この面積を650Mで割り，さらに8で割る（1バイト＝8ビット）．CDを反射型回折格子とみなして，その回折のパターンを波長が既知のレーザー光線を用いて測定することができる．

H127 回折スペクトルの次数を n として，複合線の $n\lambda$ を求め，n として

可能な値を考えよ．

H128　1) の場合には，光路差は，回折格子の前方と後方の二つの部分からなる．

2) の場合には，回折格子を考える代わりに，1 本のスリットからの回折模様について，スリットを角度 ϕ だけ‘前に’傾けたときの変化を調べよ．

H129　二つの物体の中間と外側における液面の高さと圧力を示す図を描け．

H130　メニスカスに働く水平方向の力を求めよ．

H131　蒸発の間に，水滴の表面は縮み，表面エネルギーは減少する．このエネルギーの減少を，蒸発に必要なエネルギーと比較せよ．

H132　1 個の液滴と飽和蒸気の平衡では，飽和蒸気圧は，液滴が小さいほど（わずかながら）高い．そのため，密閉容器の中に小さな液滴と大きな液滴があると，小さな液滴の表面近くの方が，大きな液滴の表面近くよりも，蒸気圧がわずかに高い．（訳注　この状態は厳密な意味の平衡状態ではない．）その結果，蒸気が小さな液滴付近から大きな液滴付近へ移動し，蒸気が小さな液滴から蒸発して，大きな液滴に凝縮する．そのため小さな液滴はさらに小さくなり，大きな液滴はさらに大きくなる．

平衡状態での飽和蒸気圧と液面の曲率の間の関係を導くには，容器内に液体と飽和蒸気があり，液体に毛細管を立ててあるときの，圧力のつり合いを考えるとよい．

H133　容器中の空気の内部エネルギーの増加は，ピストンに吊るした荷重の位置エネルギーの減少に等しい．

H134　山が非常に高くなると，その底は高圧のために融解する．山の底の層が溶けるのに必要なエネルギーと，底が溶けて山が沈むことで放出される重力エネルギーを比較せよ．

H135　封じこめた空気の状態を p–V 図に表すと直線になる．この直線はあ

る点で等温線に接し，別の点で断熱線に接する．そのことがもつ意味に気づくと，この問題の隠れた美しさがみえてくる．

H136　溶けたマグマと氷の相互作用に基づく説明を与えよ．

H137　管を満たす水の静水圧で，空洞中の水の圧力が増すので，空洞中の水は普通の 100°C より高い温度で沸騰する．飽和水蒸気の圧力と温度の関係は，表を見るか，あるいは近似法則

$$p = A\,\mathrm{e}^{-L_\mathrm{m}/(RT)}$$

を用いるかして得られる．ここで p は沸点 T における飽和水蒸気の圧力，L_m は水のモル蒸発熱，R は気体定数，A は圧力の次元をもつ定数である．間欠泉が噴出するとき，空洞中の過熱状態の水は，温度が 100°C に下がるまで沸騰を続け，そこでふたたび平衡に達する．

H138　氷の層の厚さが x のときの，層の底における熱のつり合いを考えよ．

H139　同じような形の物体に対しては，かかる時間は 1 次元的な大きさ（長さ）の 2 乗に比例することを確かめよ．

H140　この問題に隠された‘落とし穴’は蒸発熱に関連している．温度 100°C，圧力 1 atm における蒸発熱として，表に出ている標準的な値 $2256\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$ には，水蒸気になるときの内部エネルギーの増加のほかに，大気圧に逆らって膨張するための仕事も含まれている．

H141　液体が沸騰するのは，その飽和蒸気圧が，液体の上にある気体の圧力に達したとき，あるいはそれを超えたときである．

H142　振幅に対する式に，T がどのように入るかを考えよ．

H143　くもの巣の糸に水が一様につけば，水の長い円柱ができる．この円柱の表面エネルギーと，周期的な水滴の列の表面エネルギーを比較せよ．

H144　左右両側から衝突する粒子から，円柱が単位時間に受け取る運動量が全体でゼロになるまで，円柱は加速を続ける．しかし非常に長い時間の後には，円柱は動くのを止める．これは熱力学第二法則にあっている．

H145　宇宙探査機および保護シールドの内側面と外側面からの，熱の放出と吸収を考慮に入れよ．

H146　過程の間，系のエントロピーは減少できない．

H147　エントロピーを，微視的な状態の数の見地から考えよ．

H148　容器に押し込まれる空気のエントロピーの変化を計算せよ．

H149　宇宙船の内部では，ファラデー・ケージの内部と同様に，電場はゼロである．飛行の間に，宇宙船の電位が変わるかどうかを調べよ．

H150　球面コンデンサーが一定の電荷を帯電しているとき，エネルギーがどれだけ変わるかを調べよ．

H151　へこんだ薄膜とへこんでいない薄膜の，静電場のエネルギーを比較せよ．

H152　両極板上の反対符号の電荷は引き合うので，極板を引き離すには仕事がいる．ところが，極板を引き離すとコンデンサーの容量は減少し，一定電圧の下ではコンデンサーの静電エネルギーは容量 C に比例するので，コンデンサーのエネルギーは減少する．このパラドックスは，電池につないだコンデンサーは孤立系ではない，ということで解決される．

H153　各巻線に電流が同方向に流れるので，ばねは収縮する．電流に基づく収縮の力を求めるには，（極低温で）超伝導状態になっている渦巻きばねを考えればよい．超伝導状態のコイルでは，コイルの両端が短絡された状態でも，電流が流れることができる．この閉じた系のエネルギーが長さにどう依存するかを調べよ．

H154 磁石Aに働く合力（磁気力，重力，紐の張力の和）$F(x)$ を，磁石間の距離 x の関数として求めよ．$F(x)$ を用いて平衡および安定性の条件を調べよ．

H155 電池がする仕事の総量を計算せよ．

H156 油を取り除くとき，電荷は変化しないことを忘れないようにせよ．

H157 静電場の（単位体積あたりの）エネルギーは，電場の強さの2乗と誘電率に比例する：$W_{\mathrm{el}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}E^2$．極板間に誘電体が入ると（分極の結果として）電場が減り，したがって系のエネルギーも減る．誘電体に働く力は，このエネルギーの変化から（仕事の原理を用いて）計算できる．

H158 鎖の一番奥の抵抗から始めて，キルヒホッフの法則を適用せよ．各抵抗を流れる電流と，フィボナッチ数列の各項との関係を見出せ．

H159 ある格子点に電流 I が流れ込む場合と，隣の格子点から電流 I が流れ出す場合を，別々に考える．どちらの場合にも，系の対称性を適用できる．こうして得られた電流と電位の分布を重ね合わすのである．

H160 前問と同様に重ね合わせの方法を用いる．その際注意すべきことは，有限の格子の場合には，電荷の保存のために，回路から電流が出て行く場所もなければならないことである．この難問を，問題の対称性を破らずに解決せよ．

H161 解答のキーワードは‘並列’である．

H162 前の3問と同様に，重ね合わせが非常に役に立つ．

H163 抵抗の両端に，電流計を通して電池をつなぐ．電流計が測定する電流が<u>全部</u>問題の抵抗を流れ，電流の一部が他の素子に流れることがないようにしたい．

H164 電流 I が一方の頂点から立方体に入り，他方の頂点から出るとき，立方体の頂点を，等電位のものの組に分類せよ．等電位の点を全部つないだと

想像すれば，回路を簡単化できる．

H165　ガウスの法則を適用せよ．

H166　フレミングの右手の法則を用いよ．

H167　棒は重力の下で，傾斜に沿って下に加速し始める．電磁誘導によって棒に電流が流れ，それがレンツの法則に従い運動にブレーキをかける．棒の運動方程式は（電流で表せば）三つの場合とも同じである．三つの場合で運動が異なるのは，棒を流れる電流と誘導起電力の関係が異なるためである．

H168　棒の速度の変化はコンデンサーの電荷の変化に比例する．棒の加速は，誘導起電力がコンデンサーの電圧とつり合うまで続く．

H169　1) は微分方程式を解かずに答えることができる．磁気エネルギーの増加率を，電流の関数として表してみよ．

2) については，この回路の電流の周知の時間変化から，ジュール熱が電流の 2 乗に比例することに着目して，電流の 2 乗を時間の関数としてスケッチしてみれば，抵抗で発生する熱の変化率が一番速くなる時間を，定性的に求めることができる．1) の結果を用いれば，定量的な答えが積分をせずに得られる．

H170　まず，1 個のコイルと 1 個のコンデンサーだけを直列につないだ回路を考え，それがある振動数で電流共振をもつことを示せ．

H171　電磁誘導の法則により，コイルを流れる電流は急には変われない．

H172　ソレノイドの単位長さあたりの巻き線数 n は d^{-2} に比例することを示し，一巻きの巻線の抵抗を考えよ．

H173　金属中の電子を円軌道に保つ力を調べよ．電場がわかれば，ガウスの法則を用いて電荷分布がわかる．

H174　電場は単位電荷に働く力によって定義でき，磁場は運動する電荷に働くローレンツ力を用いて解釈できる．

H175 ジルの結果は正しく，ジャックの答えは誤っている．重要なことは，回転するスポークの中の電気力線は，平行ではないということである．

H176 回転する輪に地球磁場が誘導電流を誘導し，それが輪の中心の平均磁場を変える．その結果，磁針が動く．

H177 電圧計を流れる電流を I，輪の優弧を流れる電流を i とする．電流の向きの定義と矛盾しないように，二つの閉回路にキルヒホッフの法則を適用せよ．

H178 メビウスの帯は向きをもたない面なので，電磁誘導の法則を適用するには慎重を要する．帯のふちに沿う電線を，平面の上に自分自身と重ならないように広げて置いたとする．電線が囲む面の面積を定め，メビウスの帯の場合にそれと等価なものを見出せ．

H179 磁場および荷電粒子に働く磁気力のほかに，誘導電場の効果も考えよ．

H180 電磁誘導の結果できる電場の，輪の接線方向への成分が，輪にトルクを及ぼす．輪の最終角速度は磁場の最終値にのみ依存し，磁場の立ち上がり方にはよらないことが示せる．

H181 回転する円板の中に電場が誘導され，それがコイルに電流を引き起こす．地球の磁場とコイルの磁場の和または差（回転の向きによる）が，全磁場である．

H182 超伝導の輪を貫く全磁束（外部磁場の磁束と自分自身がつくる磁束の和）は，運動の間変化することはできない．外部磁場の磁束は運動で変化するが，その変化は，輪に誘導される電流による磁束の変化で相殺される．電流がわかればローレンツ力が計算でき，輪に働く合力が，輪の位置の関数としてわかる．その結果得られる運動方程式は，力学で周知の式である．

H183 双極子の静電場は，ポテンシャル $\Phi = K(\cos\theta/r^2)$ から計算でき

る．ここで K は双極子の強さに比例する定数，r は双極子からの距離，θ は双極子の軸から測った天頂角である．まず輪がビーズに及ぼす法線方向の力を計算せよ．

H184　磁場（大きさ B）と垂直な速度 v_0 で動くことは，大きさ $v_0 B$ の電場の中にいるのと等価である．v_0 をうまく選べば，粒子に働く重力をこの電場で相殺させることができる．

H185　時間変化する磁場は，輪の中に渦電流を誘導し，それが磁石の落下にブレーキをかける．最終速度が導体の抵抗に依存することは明らかである．その他のパラメーターへの依存の仕方は，次元解析を適用して見出すことができる．その際，磁気に関する式は真空の透磁率 μ_0 を含むのがふつうで，μ_0 は次元をもつことを忘れないようにせよ．

H186　真空容器に固定した座標系でこの問題を解くことも可能だが，解答はかなり複雑である．それよりも，速度 v_0 で電線と平行に動く座標系で問題を扱う方が，ずっと容易である．この座標系では，電子は電場と磁場の両方から力を受けて運動する．一方この座標系では，電子が電線にもっとも近づくときに，電子の速度はゼロになる．そして問題を解くのに，仕事とエネルギーの定理を用いることができる．

H187　この現象を，流体とともに動く座標系で説明せよ．まず，一方が他方に対して速度 v_0 で動く二つの座標系について，その間を移るときの電場と磁場の変換を考えよ．v_0 が光の速度よりずっと小さい場合を考え，相対論の効果は無視せよ．

H188　二つではなく三つの核分裂生成物がつくられるためには，はじめどれだけの（活性化）エネルギーが必要か，ということを考えよ．

H189　^{7}Be は電子捕獲により崩壊する．

H190　放射平衡にある試料の中では，各アイソトープの含有量は半減期に

比例する．このことを用いて，ラドン 220 原子の数の平衡値は 3.3×10^5 であることを示せ．次に，分離したトリウム試料の中で，この元素がどのようにつくられるかを考えよ．

H191　エネルギーと運動量の保存の相対論的な式を用いよ．

H192　ファラデー・ケージの壁の中の電子が，どのような運動をするかを調べよ．

H193　陽子の質量は，陽電子の質量よりはるかに大きい（ほぼ 2000 倍）．このため，陽電子は陽子よりはるかに大きな加速度で動くので，この運動の途中で，陽電子は正方形から遠方に離れているのに，陽子はまだほとんど動いていない，という期間があるだろう．

H194　エネルギーと運動量の（相対論的な）保存則を適用せよ．

H195　この過程（コンプトン散乱）の前後で，衝突する粒子（光子と電子）の全エネルギーと全運動量は変化しない．計算では，電子の静止エネルギー $E_0 = mc^2 \approx 510\,\mathrm{keV}$ をエネルギーの単位にとるのが便利である．

H196　電子を半径 r の球面コンデンサーとし，電荷は表面に一様に分布すると考える．質量 m，半径 r の球の慣性モーメントは $I = Kmr^2$ である．ここで K は質量分布に依存する無次元の定数で，たとえば一様な球面なら $K = \frac{2}{5}$ である．

H197　ハイゼンベルグの不確定性原理を適用し，電子の全エネルギーについて考えよ．

H198　電子が半径 r の球内に閉じ込められるときには，不確定性原理は電子の最小運動量として $p \approx \hbar/r$ を指定する．相対論的な近似式を用いて，電子の全エネルギー（静電エネルギーと運動エネルギーの和）を半径 r の関数として計算し，この関数の最小を求めよ．

H199　小さな波長の場合，水の表面波の伝播速度は表面張力から決まる．この波（表面張力波）の速度が波長にどう依存するかを調べ，波長に（短い方の）限界があるかどうかを考えよ．

H200　シャンパンのボトルを１本あけて試してみよ．読者がほとんど飲まない（あるいは飲みすぎる）のでなければ，加速の理由は，まず間違いなくわかるだろう．

解　　答

S1　かたつむり 2 の速度を，かたつむり 1 に向く成分と，これと垂直な成分に分解する (図 S1.1 参照)．この 2 匹は，相対的な速さ $v+\frac{1}{2}v = \frac{3}{2}v = 7.5\,\mathrm{cm{\cdot}min^{-1}}$ でたがいに近づくので，時間 $60\,\mathrm{cm}/7.5\,\mathrm{cm{\cdot}min^{-1}} = 8\,\mathrm{min}$ 後に出会う．実際，3 匹ともこの時出会わねばならない．速さ $5\,\mathrm{cm{\cdot}min^{-1}}$ で進むのだから，出会うまでにそれぞれが動く距離は 40 cm である．

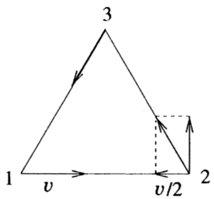


図 S1.1

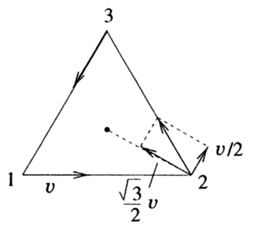


図 S1.2

同じ結果を得るのに，かたつむりの速度ベクトルを，図 S1.2 に示すように，かたつむりがつくる三角形の中心に向かう成分と，これと垂直な成分に分解してもよい．これから，かたつむりが一定の速さ $(\sqrt{3}/2)v = (5\sqrt{3}/2)\,\mathrm{cm{\cdot}min^{-1}}$ で三角形の中心に近づくのと同時に (中心で出会うことは明らか)，中心のまわりを接線速度 $\frac{1}{2}v$ でまわることがわかる．

かたつむりは，はじめ中心から $60(\sqrt{3}/3)\,\mathrm{cm}$ 離れているので，時間

$$\frac{60(\sqrt{3}/3)\,\mathrm{cm}}{5(\sqrt{3}/2)\mathrm{cm}\cdot\mathrm{min}^{-1}} = 8\,\mathrm{min}$$

後に出会う．

幾何学的対称性により，かたつむりは常に，今いる位置から三角形の中心を向く方向とは，角 $\pi/6$ をなす方向に進む．この軌跡を求める問題を，次のように一般化しておくのは無駄ではない．ある物体が，一定の速さ v で定点のまわりを，速度ベクトルと位置ベクトルが一定の角 α ($0 < \alpha < 90°$) をなすように動く．位置ベクトルのはじめの長さを r_0 とする．位置ベクトルが微小角 $\Delta\phi$ だけ向きを変えるとき，長さが $-\Delta r$ だけ変わるならば (図 S1.3 参照)，α は一

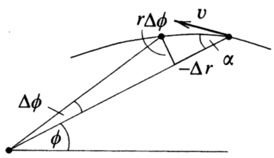


図 S1.3

定のままだから

$$\frac{\Delta r(\phi)}{\Delta\phi} = -r(\phi)\cot\alpha$$

が成り立つ．この方程式は，放射性元素の崩壊の式 $\mathrm{d}m(t)/\mathrm{d}t = -m(t)\lambda$ と全く同じ形で，その周知の解は $m(t) = m_0\mathrm{e}^{-\lambda t}$ だから，この類推からかたつむりの軌跡の式は（極座標表示で）

$$r(\phi) = r_0\mathrm{e}^{-\phi\cot\alpha}$$

となることがわかる．これはいわゆる対数らせんの式で，この式からわかるように，動径 r がゼロになるのは，無限大の角度をまわってからである．すなわち点状の物体は，有限の時間で，有限の距離を動いて中心に到達するが，それまでに中心のまわりを無限回まわる．

注　夜行性の虫は，遠方の光源（たとえば月）と一定の角度を保ちながら，直線の道を飛び続けようとする．もし近くにある電球を遠方の光源と見誤ると，ここで見出した解により虫は対数らせんをたどるが，虫も電球も点状ではないので，虫はいずれ電球にぶつかるという悲惨な結末に至る．

訳注　物理の問題では，式にとりかかる前に，何が起きるのかについて，見当をつけておくことが大切である．本問の正三角形の場合より，一辺 a の正方形の 4 隅にかたつむりがいる場合の方がわずかに簡単なので，その場合について見当のつけ方を説明する．微少時間 Δt の間，かたつむりは一定の速さ v で一定の方向に進み，そこで自分の相手が今いる方向に向きを修正して，また Δt の間進むとする．この運動をくり返せば，時間 Δt ごとのかたつむりの位置は，図 S1.4（次ページ）に示すようになる．$\Delta t \to 0$ の極限が，実際の運動を与える．2 匹のかたつむりが近づく速さ，すなわち正方形の辺が縮む速さは v だから，かたつむりが出会うまでの時間は a/v である．

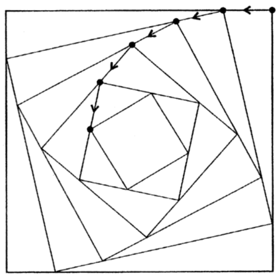


図 S1.4

(正三角形のときはこの速さが $(3/2)v$ に変わる.) このように軌跡の形が先にわかれば, それを決める方程式をつくることは容易であろう.

S2 物体の平均の速さ v_{average} は $\frac{1}{2}\,\text{m·s}^{-1}$ である. 物体は一様に減速するため, はじめの速さを v_{initial}, 終わりの速さを v_{final} とすれば $v_{\text{average}} = \frac{1}{2}(v_{\text{initial}} + v_{\text{final}})$ が成り立つから, v_{initial} は $1\,\text{m·s}^{-1}$ より大きくはない ($v_{\text{final}} \geq 0$ だから). したがって物体の速さは, 2 秒間で最大 $1\,\text{m·s}^{-1}$ しか減速しない. よって加速度の絶対値 $|a|$ は, 大きくても $0.5\,\text{m·s}^{-2}$, つまり重力加速度の $\frac{1}{20}$ 倍である. ゆえに物体と机の表面の間の動摩擦係数は $\frac{1}{20}$ 以上ではあり得ない. この値は普通の物質の間の摩擦係数よりずっと小さいので, この物体は滑るのではなく, 物体の一部または全部が転がることは, ほぼ確実だろう.

S3 1) 最短距離の経路は岸と垂直な経路である. 図 S3.1 に示す向きに漕げば, ボートは岸と垂直な方向に進む.

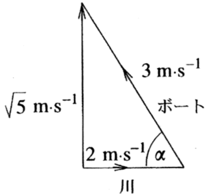


図 S3.1

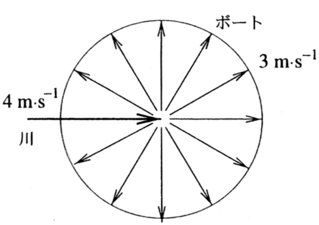


図 S3.2

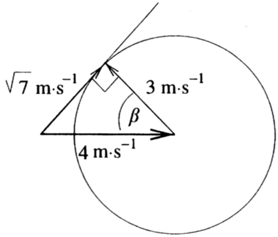


図 S3.3

ボートが岸と垂直な方向に進む速さは，$\sqrt{5}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \approx 2.24\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ である．漕ぐ人は，岸と図の角 α をなす方向を目指して，流れに逆らって漕がねばならない．ここで $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ で，これより $\alpha \approx 48°$ がでる．

2)　この場合は流れが速いので，流れに逆らって全速力で漕いでも，ボートは下流に流される．そのため前の場合と異なり，岸からの方向を自由には選べず，とくに岸と垂直な向きに進むことはできない．

選ぶことができる方向は，ボートの静水上での速度ベクトルを，川の速度に加えることによって決まる．川の速度ベクトルを描き，このベクトルの終点から，大きさが静水上でのボートの速さに等しい速度ベクトルを，全方向に描く．この合成ベクトルの終点は，図 S3.2 で示すように円を描く．

ボートの合成速度として可能なベクトルは，川の速度ベクトルの始点と円周上の点を結んだものである．最短距離の経路を与える速度ベクトルは，川の流れとなす角が最大のもの，すなわち合成速度ベクトルの方向が円の接線となるものである (図 S3.3 参照)．

よって，岸から見たボートの速さは $\sqrt{7}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \approx 2.65\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ である．この場合にも流れに逆らって漕がなければならないが，今度は目指す方向が岸となす角 β は $\cos\beta = \frac{3}{4}$ で決まり，$\beta \approx 41°$ である．図から，ボートが進む距離が川幅の $\frac{4}{3}$ 倍であることもわかる．

訳注　1)　一般に，漕ぐときに目指す方向の岸からの角を α，実際にボートが進む方向の岸からの角を ϕ とすると，関数 $\phi(\alpha)$ を極大にする α の値を微分によって求め

るのが，機械的な方法である．その結果は，静水上でのボートの速さを v_0，流速を u とするとき，$v_0 > u$ ならば $\cos\alpha = u/v_0$，$v_0 < u$ ならば $\cos\alpha = v_0/u$ である．本文に与えられている解法がすぐれているのは，微分に頼らずに同じ結果を導き，同時に結果の幾何学的な意味も明らかにする点である．

2)　経路の距離を最小にするという要求は一見もっともらしいが，必ずしも現実的ではない．たとえば $v_0 = u$ の場合には，この要求に従うと合成速度はゼロになり，川を渡るのに無限の時間がかかることになる．もっと現実的な要求は，川を渡るのにかかる時間を最小にする，というものであろう．そのためには，常に岸と垂直な方向を目指して漕げばよい．

S4　図 S4 に示すように，（じゅうたんの）動く端の位置を x とする．動く部分のもう一方の端の位置は $x/2$ なので，質量中心の座標は $3x/4$ である．$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 1$ だが，質量中心の速さは $\frac{3}{4}$ でしかない．

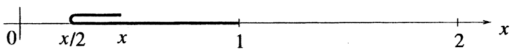


図 S4

動く部分の運動量は $p = mv$ である．ここで $v = 1$ で，m は時間に比例して増大する．よって，動く端に働く力は

$$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}m = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}1 + 0$$

である．

動く部分の質量の変化率は，次のように考えて求めることができる．動く端ははじめは原点にあり，端が $x = 2$ に達するとじゅうたん全体が動くことになる．それまでに 2 単位の時間がかかるので，$\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$ である．これに対応して，（摩擦力をすべて無視したときの）最小の力は $F = \frac{1}{2}$ である．

注　1)　じゅうたんの動く部分の質量中心は，はじめは原点にあり，2 単位の時間後に $x = \frac{3}{2}$ にくるので，これからも，動いている部分の質量中心の速さ（v_{CM}）が $\frac{3}{4}$ であることがわかる．

2)　動く部分の運動量 ($p = mv$) は，その部分の質量と質量中心の速さの積 (mv_{CM}) では ない ことに注意せよ．

3)　じゅうたんの長さを L ($L = 1$) として，エネルギー保存則 $F \times 2L = mv^2/2$ により必要な力の最小値を求めてもよさそうに見える．その結果は $F = \frac{1}{4}$ で，前に計算した値の半分でしかない．この議論の誤りは，動いている部分が次の部分を急に動かすところで，非弾性衝突がたえず起きることを無視した点にある．仕事の半分はじゅうたんの運動エネルギーになるが，残りの半分は熱として逃げてしまう．

訳注　動く部分の運動量 p は，じゅうたん全体の運動量でもある．だからその時間変化率が，外力 F に等しいのである．すでに動いている部分が動き続けるのには，力はいらない．F は，次の微小部分の速さを短時間でゼロから v に加速するための撃力として働く．

S5　解答 1　空間（平面）座標と時間座標を，x 軸，y 軸，t 軸をもつ直交座標系で表すとき（空間–時間図），等速直線運動をするかたつむりの‘世界線’は当然直線になる．2 匹のかたつむりが同じ時刻に同じ場所にいれば，つまり図 S5 に示すように 2 本の世界線が交差すれば，出会いが起こる．

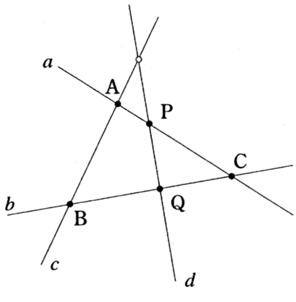


図 S5

題意から，4 本の世界線（a，b，c，d）は，5‘点’で 2 組ずつ交差することがわかる．この出会いの点を A，B，C，P，Q と表そう．点 A，B，C は一つの平面（世界線 a，b，c の平面）を決める．P と Q もこの面上にあるので，世界線 d もこの面上になければならない．これより世界線 c と d も交わることになり，6 回目の出会いも起きることがわかる．

解答 2　すでに 5 回の出会いは起きたので，3 匹の仲間全員と出会ったかたつむりが必ずいるはずである．このかたつむりを α とする．ここで α の背中に乗ったと考えてみる．すなわち α が原点に静止している座標系を選ぶ．他の 3 匹の（動いている）かたつむり（β, γ, δ）は α に出会ったので，すでに原点を通った．さらにその中の 1 匹（例えば β）は，動いている 2 匹の仲間とも出会った（というのは 5 回の出会いがあったのだから）．これは β, γ, δ が同一直線上を動いているときしか起き得ない．結局，γ と δ も，いつかは出会うはずである．

S6　重力に逆らって行われる仕事は，質量中心の高さの増分から計算できる．‘二つ折り’ の虫の質量中心は半身の中央，つまり虫の端から測った全長の 1/4 の点にある．これを図 S6 に示してある．

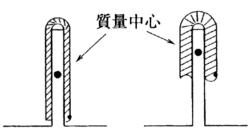


図 S6

よって幅の狭い虫の重心は壁を 5 cm 上がり，幅の広い方は 7.5 cm 上がる．それゆえ，なされる仕事の比は 2 : 3 である．

注　虫の質量中心は，いつも虫の同じ場所にあるとは限らない．さらに，質量中心が虫の体の上のどこかにあるとも限らない．まっすぐな虫では質量中心は明らかにその中央にあり，二つ折りの場合には 1/4 の所にある．だから曲がりやすい体の重心は，体の定点ではなく，位置は変わり得る．この原理が走り高跳びで使われる．選手の身体がクロスバーを越えても，重心はバーの下にある．（P32 も参照.）

S7　1)　ゴム紐の弾性定数（ばね定数）を k，伸びていないときのゴム紐の長さを ℓ_0 と表す．ゴム紐の最大の長さは $\ell_1 = h - h_0 = 23\,\mathrm{m}$，平衡の状態での長さは $\ell_2 = (23 - 8)\,\mathrm{m} = 15\,\mathrm{m}$ である．最初と最下点では運動エネルギーは

ゼロである．ゴム紐の質量を無視し，また質量中心が身体の中央にあると仮定すれば，エネルギー保存則により

$$mgh = \frac{1}{2}\,k\,(\ell_1 - \ell_0)^2$$

と書ける．さらに，平衡の状態では

$$mg = k\,(\ell_2 - \ell_0)$$

である．この2式の割り算から，ℓ_0 についての2次方程式

$$\ell_0^2 + 2\,(h - \ell_1)\,\ell_0 + (\ell_1^2 - 2h\ell_2) = \ell_0^2 + 4\ell_0 - 221 = 0$$

が得られ，これより $\ell_0 = 13\,\mathrm{m}$ を得る．

2)　落下する人の速さが最大になるとき，加速度はゼロのはずだから，最大の速さは，最終の平衡の位置（$\ell = \ell_2$）と同じ高さで起きる．

もう一度エネルギー保存則を適用して

$$\frac{1}{2}\,mv^2 + \frac{1}{2}\,k\,(\ell_2 - \ell_0)^2 = mg\,(\ell_2 + h_0)$$

を得る．ここで，比 m/k は平衡条件から得られるものと同じ，すなわち

$$\frac{m}{k} = \frac{\ell_2 - \ell_0}{g}$$

である．これをエネルギー保存則に代入すると，最大の速さは $v = 18\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \approx 65\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ と得られる．容易にわかるように，最大の加速度はジャンプの最下点で起きる．ゴム紐の最大の伸び（$10\,\mathrm{m}$）は平衡の位置での伸び（$2\,\mathrm{m}$）の5倍だから，ゴム紐の最大の張力は $5mg$ である．それゆえ落下する人に加わる最大の合力は $4mg$ で，最大の加速度は $4g$ である．

S8　氷山の底面積を A，高さを H，氷の密度を ρ_{ice}，水の密度を ρ_{water} とすると，$M = \frac{1}{3}AH\rho_{\mathrm{ice}}$ である．海面から出ている部分の高さを h とすると，浮くための条件は $(H^3 - h^3)\rho_{\mathrm{water}} = H^3\rho_{\mathrm{ice}}$ である．氷山を微少距離 x だけ押し下げると，海面下の体積は $xA\,(h/H)^2$ だけ増え，浮力の増分はこれの $\rho_{\mathrm{water}}\,g$ 倍になる．これから，振動の角振動数 ω は

$$\omega^2 = \frac{3h^2\rho_{\mathrm{water}}\,g}{\rho_{\mathrm{ice}}H^3}$$

と決まる．数値を代入すれば，周期は約 11 s であることがわかる．

S9 まず，歩道に乗り上げて駐車した結果，右前輪のサスペンションばねは，駐車前よりさらに縮むことに注意する．サスペンションばねの張力の変化と車体の持ち上がりは，どちらもセンチメートルで表すことができる．（訳注 張力の変化はばねの伸縮に比例するから．）張力変化の符号は，ばねが駐車前より縮む場合を正とする．任意の軸に関するトルクの和はゼロでなければならない．この軸としては，たとえば，車輪を結んでできる長方形の，2 本の対角線も含まれる．それゆえ，対角線の両端のばねの張力の変化は等しくなければならない．この理由により，右前輪（rf）と左後輪（lb）のばねは同じ長さ（x とする）だけ縮み，左前輪（lf）と右後輪（rb）のばねはどちらも長さ x だけ伸びる．このように伸びと縮みの長さが等しければ，車の重量を支えるばねの力の総和は変わらない．

車体の持ち上がりは，車輪 lf と rb の上では x，lb の上では $-x$，歩道上にある rf の上では $8-x$ である．車の骨組みは剛体であり，車輪 lf と rb の上の動きが同じなので，シャーシー（車台）の中央も x だけ持ち上がる．同様に，シャーシーのもう一つの対角線も直線のままだから，シャーシーの中央から見た，車輪 rf の上の持ち上がりと lb の上の沈み込みは同じでなければならない．すなわち $(8-x)-x=x-(-x)$ である．この非常に簡単な式から $x=2\,\mathrm{cm}$ を得る．結論として，歩道上の右前輪の上では車体は 6 cm 持ち上がり，左後輪の上では 2 cm 沈み，残りの二つの車輪の上では 2 cm 持ち上がる．

同じ計算法を使えば，右側の車輪を二つとも歩道に乗せて駐車するときには，サスペンションばねはそれによって伸び縮みしないことが，簡単に示せる．その結果は，単に車体の右側が 8 cm（歩道の高さ）持ち上がるだけである．ここで得た結果は，車中の人の数や位置にはよらない．それはここで調べたのが，歩道上に駐車する前と後の，車体の <u>相対的な</u> 変位だけだからである．

注 上では車体のわずかな回転は無視した．

訳注 4 本脚のテーブルに物をのせたときにそれぞれの脚にかかる力は，脚を剛体とみる範囲では決まらない．これは不静定と呼ばれる問題の一例である．力を求めるには，脚が本問のサスペンションばねと同様な弾性体であることを考慮に入れて，テー

ブルの平衡を論じる必要がある．

S10　図 S10.1 は，壁の上のジャン・ヴァルジャンの位置を示す．図 S10.2 は，彼の重さ（mg），壁の垂直抗力（N），手足に働く静止摩擦力（F_{fr}）を示す概念図である．

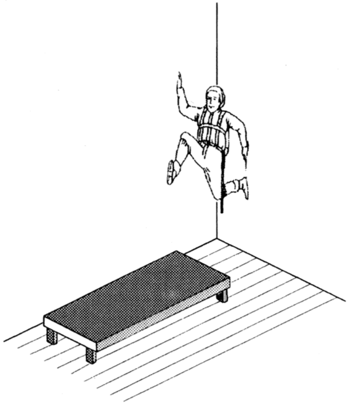


図 S10.1

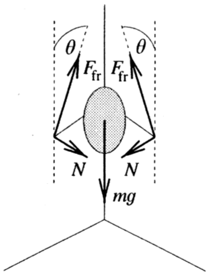


図 S10.2

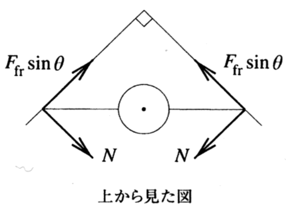


図 S10.3

二つの静止摩擦力が，どちらも鉛直方向と角 θ をなすとする．つり合いの条

件（図 S10.3 参照）は

$$mg = 2F_{\rm fr}\cos\theta \qquad \text{および} \qquad N = F_{\rm fr}\sin\theta$$

である．

この 2 式から，囚人が登っている間に壁を押しつける力の垂直成分 N が

$$N = \frac{1}{2}mg\tan\theta$$

と表せる．よって必要な合力 F は

$$F^2 = N^2 + F_{\rm fr}^2 = \left(\frac{mg}{2}\right)^2 \frac{1+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

で与えられる．また，不等式

$$F_{\rm fr} \le \mu_0 N$$

を使って（μ_0 は静止摩擦係数）

$$\sin\theta \ge \frac{1}{\mu_0} \qquad \text{すなわち} \qquad \tan\theta \ge \frac{1}{\sqrt{\mu_0^2 - 1}}$$

がわかる．どちらの不等式を使っても，最小の力は

$$F_{\min} = \frac{mg}{2}\sqrt{\frac{\mu_0^2+1}{\mu_0^2-1}}$$

と得られる．この表式から，ジャン・ヴァルジャンが壁から落ちないためには，静止摩擦係数は 1 より大きくなければならないことがわかる．静止摩擦係数が無限大に近づくと，どちらの手に加わる力も，体重の半分に等しくなる．これは，壁に糊付けになった状態である．

S11　摩擦が十分に大きければ，球が坂を滑り落ちることはないが，これだけでは平衡には不十分である．斜面を球が転がり落ちないことも必要である．

球が二つの半球からできているため，質量分布は一様ではない．球の半径を r として，質量中心と幾何学的中心の間隔が $\frac{1}{2}r$ 以内ならば，球をどんな向きに置いても，球の重さが斜面との接点 P に関してトルクをもち（図 S11.1 参照）球は転がる．

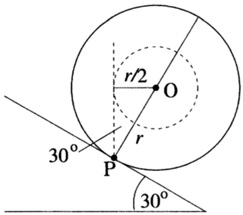


図 S11.1

以下で，二つの一様な半球からできた球の場合には，半球の密度にかかわらず，常に上のようになっていることを示そう．重い方の半球の内部に，図 S11.2 の影をつけた領域を考える．対称性から明らかなように，この領域の質量中心は，中心 O から距離 $\frac{1}{2}r$ 離れた点 A である．球の残りの領域は，全球の質量中心 S を，点 O の方にさらに引き寄せる．すなわち $\mathrm{OS} < \frac{1}{2}r$ である．したがって前の考察から，30° 傾いた斜面上では，この球は静止できないことになる．

この解を求めるのに際し，転がり抵抗（転がり摩擦）は小さく，点 P に抵抗のトルクは働かないと仮定した．斜面をマジックテープで覆ったような場合には，この仮定は明らかに正しくない．そのような場合には，球は鉛直面にでも付着するだろう．

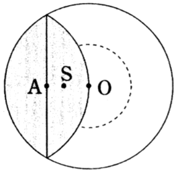


図 S11.2

訳注　一様な密度をもつ半径 r の半球の質量中心は，切り口の円の中心から距離 $(3/8)r$ だけ内部に入った点にある．したがって二つの一様な半球を張り合わせた球の，質量中心と幾何学的中心の間の距離は，$(3/8)r$ を越えることはない．それゆえこのような球は，$\sin^{-1}(3/8) \approx 22°$ より傾斜のきつい斜面上では静止できない．

S12 斜面と平行な軸をもつ直交座標系で見ると，ボールは重力加速度 $g' = g\cos\alpha$ の'鉛直'な場の中で，'水平'面から跳ね返っているように見える．同時にボールは，'水平'方向の（大きさ $g\sin\alpha$ の）一定加速度をもつ．'鉛直'方向の運動は，同じ高さまで跳ね返る運動，つまり同じ周期の運動のくり返しである．一方，'水平'方向の加速度は一定なので，続けて跳ね返る間にボールが'水平'方向に進む平均の速さは，一定の割合で増す．だから跳ね返る間に進む距離は，等差数列として増大する．

S13 図 S13 のように，台の中点が軸の下方の距離 h のところにあり，その中点から距離 x のところにハムスターがいるとする．

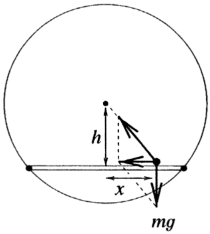


図 S13

重力のため，ハムスターはかごの軸のまわりにトルク mgx を及ぼす．一方ハムスターは，動く際に台との摩擦を使って加速する．この加速度が（中点向きに）a のとき，台には外向きに反作用の力 ma が働く．この力によるトルクは mah である．この二つのトルクが等しければ，すなわち

$$mgx = mah$$

ならば，かご（と台）は静止したままである．方向を考慮に入れれば，加速度は $a = -(g/h)\,x$ と書ける．よってハムスターに要求される運動は，角振動数 $\omega = \sqrt{g/h}$ の調和単振動である．

S14 1) 自転車は <u>合力</u>（後ろ向きに加えた力と前向きに働く摩擦力の和）の向きに動く．ギヤのふつうの位置では，自転車は後ろ向きに動くが，超低速

ギヤの場合には，前向きに動くこともあり得る．なされる仕事は常に正の量だから，学生の手は地面に対し後ろ向きに動く．通常はギヤ比 N は 1 より大きい，すなわち後輪はペダルより速く回転する．しかし $N < r/R < 1$ という例外的な場合には（R は後輪の半径，r はペダルの腕の長さ），加えた力の向きとは反対に，自転車は前向きに動く．

2)　チェーンの歯車は，後輪と同じ向きにまわる．

3)　ペダルの動きは，普通は後ろ向きで上向きである．これは 1) と 2) の重ね合わせだが，ギア比および R と r の大小のため，1) の寄与の方が大きい．

注　どんなに大きな力を加えても，自転車が前後どちらにも動かないようなペダルの位置が一カ所あることは興味深い．

訳注　少し説明をつけ加える．ペダルに後ろ向きに加えた力 F はチェーンのかかる歯車にトルク Fr を及ぼすが，歯車の慣性モーメントが無視できれば，このトルクはチェーンの張力を通して，後輪にトルク Fr/N として伝わる．したがって後輪の回転の運動方程式は，後輪の慣性モーメントを I，角速度を ω，後輪に前向きに働く摩擦力を F_{fr} とすれば

$$I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{Fr}{N} - F_{\mathrm{fr}}R$$

である．一方自転車の並進の運動方程式は，自転車の全質量を M，前進速度を V とすれば

$$M\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = F_{\mathrm{fr}} - F$$

である．この 2 式から F_{fr} を消去し，後輪が滑らない条件 $V = R\omega$ に注意すれば

$$\left(M + \frac{I}{R^2}\right)\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\left(1 - \frac{r}{NR}\right)F$$

が得られる．これが上の 1) に述べてあることである．

S15　太陽と地球の間の引力を，地球を近似的な円軌道上に保つための向心力に等しいとおき，地球の角速度 ω を公転周期 T で表す．m，M をそれぞれ地球と太陽の質量とし，r を両者の平均距離とすると，この等式は

$$G\frac{mM}{r^2} = mr\omega^2 = mr\frac{4\pi^2}{T^2}$$

となる．m で割り，M を太陽の平均密度 ρ と半径 R で表すと，

$$G\frac{\frac{4}{3}\pi R^3\rho}{r^2} = \frac{4\pi^2}{T^2}r$$

これより公転周期

$$T=\sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}\left(\frac{r}{R}\right)^3}$$

を得る．

地球の公転周期は，重力定数 G，太陽の平均密度 ρ，および比 r/R だけによることがわかる．それゆえ，密度を一定に保てば，太陽系を相似的に変えても1年の長さは変わらない．また，この長さと関係があるのは太陽の密度と大きさだけで，地球のデータは関係しないこともわかる．大きさが太陽と比べて小さい物体であれば，どれも同じ公転周期をもち，同じ軌道上を動くであろう．

注 この結果は，ケプラーの第三法則 $T^2/a^3=4\pi^2/GM$ を使って導くこともできる．ここで a は地球の楕円軌道の半長径である．太陽の質量を平均密度で表せば，相似的に縮小しても惑星の楕円軌道の周期が変わらないことが明らかになる．

S16 太陽が地球の位置につくる重力加速度は，連星の一方の星が他方の星の位置につくる重力加速度と同じである．なぜなら，ニュートンの重力の法則により，g（単位質量に働く重力）は，引力の中心にある質量と，中心から第二の物体への距離にだけ依存し，この二つの量は両方の系で同一だからである．

ゆえに連星の系では，二つの星は地球と同じ加速度で動くが，軌道半径は地球の軌道半径の半分である．その結果，（$a=r\omega^2$ だから）二つの星の角速度の2乗は地球の角速度の2乗の2倍でなければならない．よって連星の公転周期は，太陽をまわる地球の公転周期を $\sqrt{2}$ で割ったものに等しく，$8\frac{1}{2}$ カ月である．

S17 1) 半径 R の円軌道上を速さ v で動く衛星の加速度は，$g=v^2/R$ である．R が地球の半径（正確にはそれよりわずかに大きな値）ならば，g は地表での重力加速度でなければならない．このことから，人工衛星の速さに対する‘第一宇宙速度’$v_1=\sqrt{Rg}=7.9\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$ が定義される．

地球の自転が与えてくれる‘初速’を考慮に入れると，打ち上げに際し，上の速さを全部与える必要はなくなる．地球の自転による助力は赤道上で最大で，およそ $0.5\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$ であり，したがって地球に対して $7.4\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$ の初速で十分である．ただその場合，赤道上またはその近くから，東向きに打ち上げねばならない．

2)　極軌道（両極上を通過する軌道）をまわる衛星の，地球の自転軸に関する角運動量はゼロである．角運動量が後で変わることはないから，この条件は打ち上げ当初から満たされねばならない．それゆえ，上で述べた‘助力’は利用できない．それどころか，この場合は地球の自転はじゃまになる．というのは，衛星に南北方向の $7.9\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$ の速さを与えるほかに，地球の自転による東西向きの余分な速さを打ち消す必要があるからである．この考慮は，極付近から衛星を打ち上げるとすれば不要だろうが，もちろんそんなことは技術的に困難である．

それゆえ，極軌道に衛星をのせるのに要する初速は，赤道軌道の場合の少なくとも $7.9/7.4 \approx 1.06$ 倍大きい．つまり必要な運動エネルギーは少なくとも 1.13 倍大きい．これはたいした差ではないと思えるかもしれないが，実際には，初速をわずかに増すだけでも膨大な努力が必要になる．その理由は，衛星とともに打ち上げロケットも加速せねばならず，そして打ち上げるべき質量は，目的の最終速度について指数関数的に増すからである．

3)　地球の引力圏を脱出する（つまり地球からはるか遠くに離れる）ためには，探査機は脱出速度，すなわち‘第二宇宙速度’ $v_2 = \sqrt{2Rg} = \sqrt{2}v_1 \approx 11.2\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$ を得なければならない．地球の自転はここでも使える．赤道から東向きに打ち上げるならば，地球に対して $10.7\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$ の打ち上げ速度で十分である．

4)　地球は太陽のまわりをおよそ $30\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$ の速さで公転している．太陽に到達するには，宇宙探査機は $30\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$ の初速（正確には $29.5\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$，差の $0.5\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$ は地球の自転による）で打ち上げねばならない．目的が太陽系離脱なら，宇宙探査機は $30\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$ の $\sqrt{2}$ 倍の速さに達しなければならないが，打ち上げの時期と方向をうまく選べば，地球が公転軌道上でもつ‘初速’をこれから差し引くことができる．すなわち $12\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$ の速さで十分である．

このように宇宙探査機は，太陽に送るよりも太陽系から脱出させる方が容易である．（後者にはすでに成功したが，前者はこれからである．）外惑星（火星，木星，土星など）のもたらす可能性を考えに入れると，状況はさらによくなる．打ち上げの時と方向を正しく選べば，宇宙探査機は外惑星からかなり‘押される’（すなわちエネルギーを受け取る）ことが可能になる．これは‘重力パチンコ’（あるいはスウィングバイ）という名で知られる現象である．このように計

画された宇宙探査機は，きわめて遠方まで自力で進む必要はなく，火星または木星まで行きさえすれば，あとは‘自動的に’事が進む．

注　もし探査機を駆動するロケットを2段階に分けて点火することができるなら，第一の点火でロケットを楕円軌道にのせ，第二の点火でロケットを軌道の遠日点で静止させることにより，太陽に衝突させるのに要する全エネルギーは，上で計算したものより少なくてすむ．

S18　ロケットはできるだけ高い全エネルギーに達する必要がある．重力のポテンシャルエネルギーを‘無限遠’でゼロにとれば，地球表面で静止しているロケットは負のエネルギーをもつ．エンジンの動作中に解放されるエネルギーは，ロケットの全エネルギーを増す．ロケットのポテンシャルエネルギーと運動エネルギーの和が正になれば，ロケットは地球の重力場を離脱することができる．

主エンジンと補助エンジンの動作中に解放されるエネルギーは，ロケットおよび排出される燃焼生成物の全エネルギーを，一定値だけ増す．この増加量は，エンジンが点火される時期には無関係である．しかし燃焼生成物が地球に戻るときの速さは，ロケット動作の時期の選び方に依存する．実際，補助エンジンが動作し始めるときのロケットの位置が高いほど，燃焼生成物が地上に戻るまでの距離は長くなり，地上に達したときの速さとエネルギーは大きくなる．そのため，補助エンジンを点火する時期が早いほど，ロケットが最終的に得るエネルギーは大きくなる．同じ議論は主エンジンにもあてはまるので，エネルギーの考察だけからいえば，エンジンをできるだけ短時間，できるだけ大きな推進力で働かせるのが，もっともよいことになる．

S19　鉄球が沈んでいくに従い，蜂蜜の質量分布および質量中心の位置は時間変化する．全系の質量を M，球の体積を V，蜂蜜と球の密度をそれぞれ ρ_{h} および ρ_{b} とすると，時間 t の間の質量中心の変位は

$$s = vt\,\frac{\rho_{\mathrm{b}}V - \rho_{\mathrm{h}}V}{M}$$

である．この理由は，鉄球が距離 vt だけ進んだのを，鉄球が同体積の‘蜂蜜球’

と位置を交換した，とみることができるからである．ゆえにこの系の全運動量は

$$p_{\mathrm{total}} = \frac{Ms}{t} = v\rho_{\mathrm{b}}V - v\rho_{\mathrm{h}}V$$

である．右辺第一項は鉄球の運動量だから，第二項が求める蜂蜜の運動量である．すなわち

$$p_{\mathrm{honey}} = -v\rho_{\mathrm{h}}V = -2\,\mathrm{g\cdot cm\cdot s^{-1}}$$

負の符号は，蜂蜜の運動量が上向きであることを示す．この大きさは，鉄球と同じ速さで上向きに動く蜂蜜球の運動量と同じである．

S20　気体分子の（平均）運動エネルギーはその速度の2乗に比例する．気体の内部エネルギーは温度に比例する．それゆえ $v^2 \sim T$ である．壁が気体より暖かい（$T_1 > T$）場合，壁との衝突で跳ね返る気体分子の平均の速さは増す（壁が気体を暖める）．壁が気体より冷たい（$T_1 < T$）場合は，事情は逆になり，跳ね返る分子の速さは遅くなる（気体は冷える）．

分子の観点からみれば，気体が容器の壁に圧力を及ぼすのは，分子が壁にぶつかって跳ね返るとき，分子の運動量が変化するからである．運動量のはじめの値と衝突頻度を与えたとき，単位時間あたりの運動量の変化は，暖かい壁から跳ね返る分子の場合の方が，冷たい壁から跳ね返る分子の場合より大きい．したがって気体が壁に及ぼす圧力は，暖かい壁の場合の方が，冷たい壁の場合より大きい．

注　この現象は，ラジオメーター（‘光車’）が予想外な回転をすることを説明する．精巧な軸受けに取り付けた羽根車の，各羽根の片側は黒く塗り，反対側は輝くまで磨いておくと，光を当てた羽根車はまわり出す．一見すると，光の反射にともなう圧力が，車をまわすと思いたくなる．しかしこれは正しくない．というのは，経験によれば，前に動くのは羽根の輝く方の側だからである．（黒い側は光を吸収し，輝く側は光を反射する．その結果輝く側の方が，光子の運動量により大きな変化を引き起こす．）正しい説明は，羽の黒い側の方が暖まり，そのため黒い側で跳ね返る気体分子の圧力が，冷たい輝く側のものより大きいからである．

S21　熱膨張の結果，どちらの球の大きさも増加する．板の上の球の質量中

心は上がり，糸に吊るされた球の質量中心は下がる．それゆえ球の位置エネルギーは，図 S21 に示すように，板の上の球では増し，糸に吊るされた球では減る．

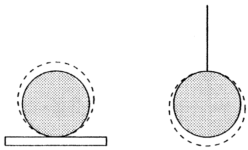


図 S21

熱力学第一法則によると，球に与えられた熱は，内部エネルギーの増加，および大気圧に逆らって膨張する際の少量の仕事（これはどちらの球でも同じ）だけではなく，重力の位置エネルギーの変化も引き起こす．断熱板の上の球の位置エネルギーはわずかに増えるので，内部エネルギーの増加はその分だけ少ない．反対に，吊るした球の位置エネルギーの減少分は，内部エネルギーの増加に寄与する．結局，糸に吊るした球の温度の方が高くなるだろう．

数値的な見積もりはしておく価値がある．どちらも半径が 10 cm の鉄の球の温度が 100°C 上がるとき，この効果から温度差 $\Delta T \approx 5 \times 10^{-6}$ °C が生じる．この大きさは実際には検出不可能である．

S22　定量的議論をする際，電球の抵抗は加わる電圧にはよらないと仮定する．この仮定は正確とはほど遠いが，定性的には正しい結論を与えるだろう．供給電源の電圧（の実効値）を V とし，電球の表示ワット数を w_i とすると，電球の抵抗 r_i は V^2/w_i である．二つの電球を直列にして電源につなぐと，電流（の実効値）は $V/(r_{\mathrm{A}} + r_{\mathrm{B}})$ であり，電球 i（i は A または B）の消費電力は

$$P_i = \frac{V^2}{w_i}\left[\frac{V}{(V^2/w_{\mathrm{A}}) + (V^2/w_{\mathrm{B}})}\right]^2$$

である．

最初の約束（$w_{\mathrm{A}} = w_{\mathrm{B}} = 100$ W）では，P_{A}，P_{B} ともに 25 W のはずであった．実際には $P_{\mathrm{A}} = 8$ W，$P_{\mathrm{B}} = 32$ W だから，明らかに A は試験に落ちた．それに比べれば，B は二重の勝利者だと考えられなくもない．32 W の電力を手に

入れ，しかも $(8+32)/2=20\,\mathrm{W}$ 分しか払わないのだから．そうはいうものの，32 W でも勉強するには暗すぎるので，B も多分試験に落ちただろう．

S23　同じ抵抗を二つ，図 S23 のように接続した簡単な回路が，題意を満たす．

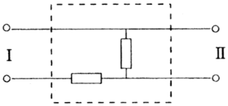


図 S23

S24　バケツが満水ならば，水の重心はバケツの重心より上にあるので，全体の重心はそのときもっとも高い位置にあり，その結果，周期はもっとも短い．水が漏れ始めると全体の重心は下がり，周期は長くなる．水がバケツの半分になったときは，水の重心はバケツの重心より下にある．全体の重心は前よりさらに下がり，バケツの重心よりかなり低い．バケツが空になったときは，重心は空のバケツの重心と一致して，前の場合よりも高くなる．つまり，全体の重心はある点で下がるのを止め，その後はまた上に動き始める．要約すると，最長の周期は，全体の重心がもっとも低い位置にあるときに起こる．次の問題で示すように，これは全体の重心が水面上にきたときである．

S25　明らかに，はじめのうち加えた水は，空のビーカーの重心より下に入るので，全体の重心を押し下げる．ある段階で，加えた水が今の全体の重心より上に入ると，全体の重心は持ち上がる．よって最大の安定のためには，全体の重心はちょうど水面上になければならない（図 S25 (次ページ) 参照）．

よって

$$10^{-1}\times 10^{-1}+\pi\,(3\times 10^{-2})^2\,10^3\,x\,\frac{x}{2}=x\left[10^{-1}+\pi\,(3\times 10^{-2})^2\,10^3\,x\right]$$

より $x=55.9\,\mathrm{mm}$ を得る．

S26　まず，ボウルの幾何学的中心（訳注　半球の断面の中心）が，前と同じ

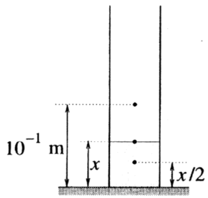


図 S25

高さのままだと仮定してみる．そうすると，ボウルは中心のまわりで回転するだけで（それと横に動くかもしれないが），前より深く水中に沈むことはない．この状況では，鎖と反対側の縁は水面まで下がり，水がボウルに入る．以下で，このようなことが起こり得ないことを証明しよう．

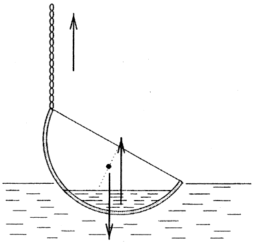


図 S26

この仮定の状況のもとでは，物体に働く浮力ははじめと変わらない．つまり，浮力はボウルとスープの重さの和に等しい．ゆえに，鎖はボウルに何の力も及ぼしていないことになる．ところが，ボウルの縁を持ち上げると，ボウルの質量中心は浮力の作用線上からはずれるので，トルクのつり合いは，鎖が力を及ぼしてボウルを上に引っ張るとき，はじめて可能になる．

この二つの矛盾する条件は，最初の仮定が間違っていたことを示す．ボウルの幾何学的中心は同じ場所にはとどまれず，上に移動しなければならない（鎖が上向きの力を及ぼせば，浮力は前より小さくてすむので）．このことは，ボウ

ルの縁の一番低い点も，水面より上になければならないことを意味する．

スープが水にこぼれ出す可能性も，考えておかねばならない．これは，（ボウルを傾ける前の）スープの面の高さが，湖の水面より高いとき，つまりスープの密度が水の密度より低いときなら起こり得る．現実には，こんなことはないだろう．

S27　球に働く力は，重力 mg，水の浮力，および穴の縁が及ぼす法線方向の抗力である．浮力がちょうど球の重さに等しくなったとき，法線方向抗力はゼロになり，球は穴から離れる．

まず，水深が h のときに，球に働く浮力を計算する．球の水中にある部分の体積を V とする．ここで $V = V(r, R)$ である．仮に，穴より突き出ている部分を球から取り除き，そして容器の下の空間も水で満たされているとしよう．そのときの浮力は，水の密度を ρ として

$$F_1 = \rho V(r, R)$$

である．実際には穴の下には水がないので

$$F_2 = \rho g h \times \pi r^2$$

の部分はない．だから実際に球に働く浮力は

$$F = \rho V(r, R) - \rho g h \times \pi r^2$$

である．明らかに，h が十分大きいときには F は負になり，‘浮力’ は下向きになる．h が減少すると F は増大する．球の一番上まで水中にあるとすれば，$F = mg$ になったとき球は浮き上がる．そのときの水深が h_0 である．ゆえに

$$h_0 = \frac{V(r, R)}{\pi r^2} - \frac{m}{\pi r^2 \rho}$$

である．

積分をひたすら実行するか，幾何の教科書を参照するかすれば，端を切り落とした球の体積は

$$V(r, R) = \frac{\pi}{3}\left[2R^3 + (2R^2 + r^2)\sqrt{R^2 - r^2}\right]$$

と得られ，この式を用いて h_0 は

$$h_0 = \frac{2R^3}{3r^2} + \frac{2R^2 + r^2}{3r^2}\sqrt{R^2 - r^2} - \frac{m}{\pi r^2 \rho}$$

と表せる．

上式が成り立つのは，球の一番上まで水中にあるとき，つまり $h > R + \sqrt{R^2 - r^2}$ のときだけであることを忘れてはならない．そうでない場合には，$V(r, R)$ の表式を変える必要がある．すなわち，一端を切り落とした球の代わりに，直径の両端の部分を切り落とした球の体積を計算しなければならない．その結果，h_0 についての 3 次方程式

$$h_0^2 (3\sqrt{R^2 - r^2} - h_0) = \frac{3m}{\pi \rho}$$

が導かれる．

注　浮力の計算の際，穴の半径 r の代わりに別の変数 $\ell = \sqrt{R^2 - r^2}$ を用いることもできる（図 S27.1 参照）．

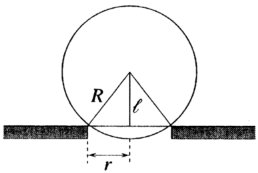


図 S27.1

前述の議論を使うか，球の水中にある部分を押し上げる力の鉛直成分を積分するかすれば，浮力を

$$F(h) = \begin{cases} \frac{1}{3}[3\ell^2(h-\ell) + 2\ell^3 - (h-\ell)^3]\,\pi\rho g, & h \le R + \ell \text{ のとき} \\ \frac{1}{3}[2(R^3 + \ell^3) - 3(h-\ell)(R^2 - \ell^2)]\,\pi\rho g, & h \ge R + \ell \text{ のとき} \end{cases}$$

と計算できる．

h の関数としての浮力 F の表式は，二つの部分からなる．図 S27.2 に示すように，$0 \le h \le R + \ell$ の区間では浮力は h の 3 次関数であるが，$h \ge R + \ell$ の領域では 1 次関数として減少する．

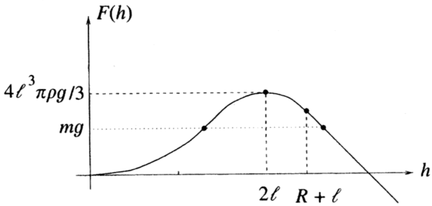


図 S27.2

水深の臨界値 h_0 は，グラフ上で，$F(h)$ と直線 $F = mg$ の交点として求めることができる．$F(h)$ を微分すれば，$F(h)$ は $h = 2\ell$ で最大値 $4\ell^3\pi\rho g/3$ をとることがわかる．球の重さがこの値（半径 ℓ の球形の水の重さにちょうど等しい）より大きければ，どんな水深であっても，球が穴から浮き上がることはない．

S28　シャボン玉が浮かんでいるので，シャボン壁とその中のヘリウムの質量の合計は，シャボン玉が排除した空気の質量に等しい．ヘリウムの密度は空気の密度の半分以下だから，ヘリウムの質量は排除された空気の質量の半分以下である．よって，シャボン壁の方がその中の気体より重い．

S29　(a) の場合には，水が管から流れ出ないことは明らかである．さもないと，流れ出る水で無限にまわり続ける水車を用いた，永久機関が可能になる．

(b) と (c) の場合は，それほど簡単ではない．どちらの管の端も水面より低く，その結果，そこでの水圧は大気圧より高い．どちらの場合にも，水面の曲率半径に対応する圧力が，水と空気の圧力差に等しくなるような形に，水が管からあふれ出す．(a)，(b)，(c) の場合に対する水面を図 S29（次ページ）に示してある．

最大の曲率（最小の曲率半径）は，半球形の場合に生じる．これは高さ H の水柱の圧力にあたる．というのは，これが鉛直な管の中で，水が達する高さだからである．空気と水の圧力差が ρgH より大きくなれば，表面張力は管内の水を支えられなくなり，水は流れ出す．これが管 (c) で起こることである．（問題の図は正しく縮尺してあるとし，$H' > H$ とする．）一方，管 (b) からは水

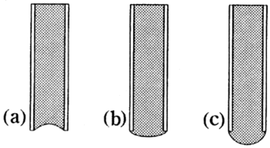


図 S29

は流れ出さない．

S30　問題で述べられている系は球対称である．それゆえ，つくられる磁場も球対称でなければならない．球対称なベクトル場は，どこでも動径方向を向かねばならず，その大きさは原点からの距離だけで決まる．すなわち $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B(r)\,\mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ である．

一方，磁場は源（磁気単極子）を含まず，任意の閉曲面を貫く磁束は，どの時刻でもゼロでなければならない．とくに，コンデンサーと同心の半径 r の球面を考えてみる．源がないことの帰結は，任意の r に対して $B(r) = 0$ という場合にだけ満たされる．このことより，問題で述べられている電流は，球面コンデンサーの内部，外部のどちらにも，磁場をつくらないことがわかる．

注　球面コンデンサーの極板間で，電磁気学の基本法則がどう満たされるかということは，調べる価値がある．導体中を流れる電流のまわりには磁場ができ，この磁場の回転（カール）は電流に比例するというのは正しいか．

S31　電荷の分布と運動はどちらも球対称だから，輻射は球対称でなければならない．磁場は常に動径方向を向き，球からの距離が同じならば，方向とは無関係に同じ大きさをもたねばならない．しかしこれは（磁場の大きさがゼロでなければ）不可能である．このような磁場は磁荷（磁気単極子）の存在を意味するが，磁荷は自然界にはないことが実験でわかっているからである．同じような議論で，電場も球対称で大きさは球面の全電荷のみに依存し，脈動のパラメーターにはよらないことが示される．それゆえ，球外ではクーロン静電場だけが観測され，球は輻射を全く放出しない．

球面を部分に分けて考えると，各部分は双極子アンテナのように働くので，

輻射を出す．しかし各部分からの輻射の和をとる際には，大きさだけではなく位相も考慮しなければならない．その結果，多数の双極子アンテナからの輻射の寄与は打ち消しあう．このことは，球対称性に頼らない，直接の（長い）計算で証明することができる．

S32　月面での走り高跳び競技会はまだ開かれていないが，ここでは，どのような結果が出るかを見積もってみる．男子の地上での世界記録は 240 cm を越える．男子の優秀な走り高跳び選手の場合，身長は 190 cm 以上，体重はおよそ 80 kg で，質量中心は地表から約 110 cm のところにある．跳躍が成功するには，身体のすべての部分がバーの高さまで上がらねばならないが，質量中心がそこまで上がる必要はない．そのためには特別な跳躍技術（背面跳び）が必要であり，これはスローモーションビデオで調べることができる．跳躍の頂点に達したときでも，選手の質量中心はバーのおよそ 20 cm 下にある．（バーの上で横に寝る）ウェスタンロールや，（脚を大きく開く）はさみ跳びの方法では，選手の質量中心はバーの上まで上がらねばならない．

見積もりの際の難関は，地球上と月面での，選手の踏み切り運動の比較である．ここでは仮定として，地球上と月面のどちらでも，選手の質量中心が，最下点（ジャンプ直前のかがみこみ）から最高点（地面から離れる瞬間）へ，$s = 40$ cm だけ上がるとする．その間に選手の筋肉がした仕事は，それに引き続いて質量中心を（地球上では）110 cm から 220 cm まで運ぶのに，つまり $h = 110$ cm だけもち上げるのに，十分なものでなければならない．助走の効果はすべて無視（もしくはどちらの場所でも同じと仮定）した．

ここでの見積もりの基礎は，どちらの場合も同じ仕事がなされ，同じ跳躍技術が用いられるという仮定である．なされる仕事は，選手の身体の運動エネルギーと質量中心の位置エネルギーの和 $W = \frac{1}{2}mv^2 + mgs$ となる．地面を離れるときの選手の速さは，公式 $v^2 = 2gh$ で計算できる．よって，なされる仕事は

$$W = mg(h + s) = 80\,\mathrm{kg} \times 10\,\mathrm{m \cdot s^{-2}} \times 1.5\,\mathrm{m} = 1200\,\mathrm{J}$$

である．

選手が月面上でする仕事もこれと同じで，地面を離れる前に質量中心が s

だけ上がることも変わらないと仮定する．月面での重力加速度は，地球上での重力加速度の 1/6 である．すなわち，月面での高跳びのエネルギーの式は $1200\,\mathrm{J} = \frac{1}{6}mg(s+h')$ であり，これから $h' = 8.6\,\mathrm{m}$ と求まる．これが月面上で選手の質量中心が上昇する鉛直の高さである．これに質量中心の初期値である 110 cm と，特別な技術による余分の 0.2 m を加えると，記録の見積もりの結果は $9.9\,\mathrm{m} \approx 10\,\mathrm{m}$ となる．

注 この問題には，ふつうは重力加速度の差だけを考えて，月面上の世界記録は地球上の 6 倍，つまり約 14～15 m だと答える．上の分析によればこれは楽観的すぎる．上の見積もりでも，多分まだ楽観的すぎるだろう．というのは，我々のモデルでは，選手はより短い時間に同じ量の仕事をしなければならないから，つまり，より大きな仕事率を必要とするからである．月面では，選手は出力をほぼ 15%増さねばならないことが示せる．上の仮定の代わりに，地面から離れる速さが地球上と同じだと仮定すると，8 m という結果が得られる．この値は低すぎるだろう．すべてのことを考慮に入れると，もっとも確からしい高さはおよそ 9 m であろう．

S33 1) 机から落ちていく球 B の鉛直な加速度は常に g で，これから 1 m 落ちるのにかかる時間を決めることができる（およそ 0.5 秒）．単振り子のおもりの運動は，振幅が小さいという近似が使えないのでかなり複雑であり，そのため動いている時間は簡単には決められない．はっきりいえるのは，振り子の紐が上向きの力をおもりに及ぼすので，おもりの鉛直方向の加速度は常に g より小さいことである．ゆえに球 A の鉛直方向の運動は球 B の鉛直方向の自由落下より時間がかかる．球 A の方が長い時間動く．

2) 振り子のおもりは円の 1/4 を描く（約 1.5 m の経路）．球 B は放物線軌道をたどるが，その長さは初等的な方法では求められない．けれどもこの球は，机の端から距離 $vt = \sqrt{2\times g\times 1}\sqrt{2\times 1/g} = 2\,\mathrm{m}$ 離れた点で床にあたる．それゆえ軌道の長さは，放物運動の始点と終点の間の最短距離，つまり $\sqrt{5}\,\mathrm{m} \approx 2.2\,\mathrm{m}$ より短くはない．

結論として，球 B の方が振り子のおもりより長い経路を短い時間で動く．

S34 等速円運動では，物体の接線方向加速度はゼロ，法線方向加速度は v^2/R である．ここで v は物体の速さ，R は円の半径である．

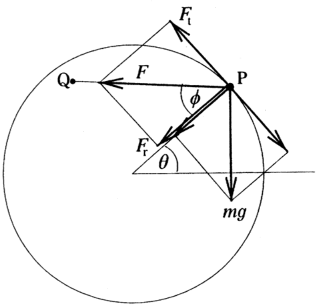


図 S34.1

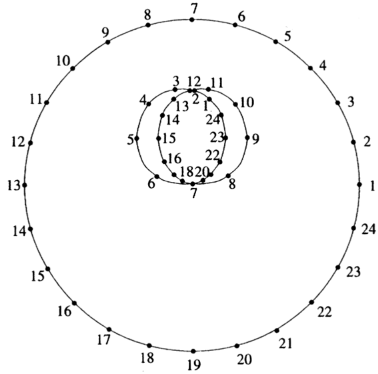


図 S34.2

重力の法線方向成分および接線方向成分は，それぞれ $mg\sin\theta$ と $mg\cos\theta$ なので（図 S34.1 参照），紐 PQ がおもりに及ぼす力 $\mathbf{F}$ は次の成分をもつ：

$$F_{\mathrm{t}} = mg\cos\theta \quad \text{および} \quad F_{\mathrm{r}} = \frac{mv^2}{R} - mg\sin\theta$$

この表式から決まる力 $\mathbf{F}$ の方向，すなわち紐の方向を，図の ϕ で表すと：

$$\cot\phi = \frac{F_{\mathrm{r}}}{F_{\mathrm{t}}} = \frac{v^2}{gR\cos\theta} - \tan\theta = \frac{1.83}{\cos\theta} - \tan\theta$$

図 S34.2 に紐の両端の対応する位置を示した．角度 θ は $15°$ きざみで増加させ，紐の他端 (Q) の位置は，計算した角 ϕ の方向に，点 P から紐の長さ分の所に印を付けて描いた．

S35　図 S35.1（次ページ）の 2 本の線分に注目する．鉛直方向の線分の方が加速度（g）は大きいが，経路は長い．斜面と直交する線分の方は短いが，その方向の加速度は小さい．最短時間の経路は，この 2 本の線分の中間にあると推定できる．

次に以下の補助定理を証明する：同じ時刻 $t = 0$ に同じ点を出発して，いろいろな方向の摩擦のない傾斜に沿って落ちて行くすべての物体は，その後のどの時刻にも，一つの円の上にいる．

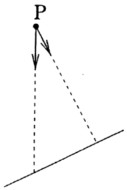


図 S35.1

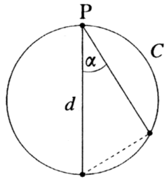


図 S35.2

図 S35.2 に示すように，定理が述べる円 C の頂点が出発点 P である．時間 t の後，鉛直な針金に沿って自由落下する物体は $d = \frac{1}{2}gt^2$ だけ落ちている．これが C の直径に違いない．鉛直方向と角 α をなす針金を滑り落ちる物体は，加速度 $g\cos\alpha$ をもつ．同じ時間 t の間に，物体は P から測った距離 $\frac{1}{2}g\cos\alpha\, t^2 = d\cos\alpha$ だけ進む．ところがこれは，針金が切り取る C の弦の長さにほかならない．ゆえに α をどうとっても物体は C の上にある．よって補助定理は証明された．

元の問題は，この補助定理を使って簡単に解ける．同じ時刻に点 P から出発して，異なる方向に進むすべての物体は，P を頂点とし，時間とともに広がる円の上にある．ある時間がたつとこの円は斜面に触れ，接触点 P′ で斜面は円に接する．点 P から出発した物体は，線分 PP′ に沿って動けば最短時間で斜面に到達する．実際には 3 次元の問題だから，点 P から出発する各物体は，任意の時刻に，一つの球面上にいる．最短時間の方向は，球が斜面と最初に接触する点と P を結んで得られる．しかし今の問題では，これまで行ってきたように，P を通り，斜面の最大傾斜線と平行な鉛直な断面を調べるだけで十分である．

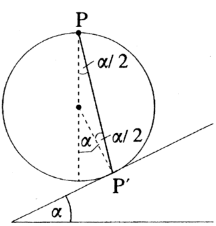


図 S35.3

図 S35.3 から明らかなように，水平と角 α をなす斜面の場合には，最短時間を与える線分 PP′ は，鉛直方向と角 $\alpha/2$ をなす．つまり最適の方向は，この解答のはじめに述べた 2 本の線の間の角を，2 等分する方向である．

S36　この問題の解は，長針に固定した回転座標系を使うと驚くほど簡単になる．この系では長針は静止し，短針は‘反時計回り’に動く．長針と短針の (先端の) 間隔が増大する速さは，短針の先端の速度ベクトルの作用線が長針の先端を通るとき，最大になる．このとき，2 本の針とその先端を結ぶ線分は，図 S36 のように直角三角形をつくる．

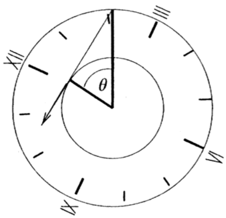


図 S36

長針の長さは短針の 2 倍だから，両針のなす角は $\theta = \cos^{-1}(1/2) = \pi/3$ である．角が θ となる (0 時以降の) 正確な時刻は，次のように計算できる．長針は短針より 12 倍速く動くので，短針と 12 時の方向のなす角 ϕ は，$12\phi - \phi = \theta$ から $\phi = \frac{1}{11}\theta$ と得られる．長針は 0 時から角 $\frac{12}{11}\theta = \frac{4}{11}\pi$ だけ動いているので，時刻は 0 時 11 分の直前である．両針の角度がこの値になるのは，それ以後何回か (1 時間ごとに 2 回) ある．次に起きるのは，両針の先端がもっとも速く近づくときである．

注　この問題は，微分を使って腕力で解くこともできる．時計の両針の先端間の距離の表式から相対速度がわかり，それが極値をとる角度を決める．

S37 図 S37 に示す座標系を用いれば，石の運動は以下の表式で記述できる．

$$x = v_0 t\cos\alpha, \qquad y = v_0 t\sin\alpha - \frac{g}{2}t^2$$
$$v_x = v_0\cos\alpha, \qquad v_y = v_0\sin\alpha - gt$$

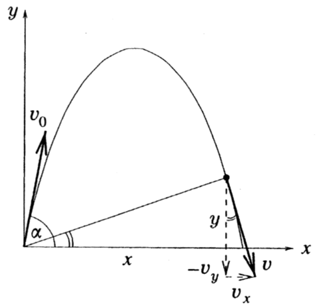


図 S37

原点から石への距離は，速度が位置ベクトルと直交するとき最大になる．このための条件は

$$\frac{y}{x} = -\frac{v_x}{v_y}$$

で，これから，それが起きる時刻 t に対する次の 2 次方程式がでる：

$$t^2 - \frac{3v_0\sin\alpha}{g}t + \frac{2{v_0}^2}{g^2} = 0$$

それが起きないためには，この方程式の判別式が負でなければならない．すなわち

$$\left(\frac{3v_0\sin\alpha}{g}\right)^2 < 4\left(\frac{2{v_0}^2}{g^2}\right)$$

ゆえに，投げた人から石が離れ続けるためには，$\sin\alpha < \sqrt{8/9} = 0.94$，すなわち $\alpha < 70.5°$ でなくてはならない．

S38 キリギリスの軌跡は放物線で，丸太の両側の二つの対称な点 B と B* で，丸太に接触する．（今の段階では，この 2 点については何もわからない．2

点が丸太の頂点 E で一つになるかもしれないし，ならないかもしれない.）図 S38 のように，キリギリスは初速 v_1，水平からの角 θ で，点 A から跳び上がる. 接点 B と B* でのキリギリスの速さは v_2 で，水平と角 β をなす.

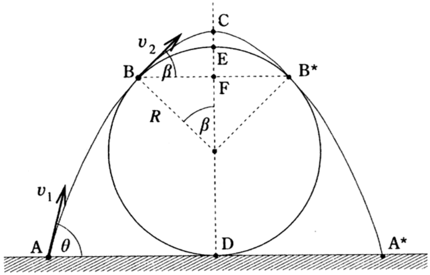


図 S38

簡単のために，問題の独立変数として β をとる．点 B での速度の鉛直成分は，軌跡の BC 部分 (C は放物線の頂点) の飛行時間を t_2 とすると

$$v_2 \sin\beta = gt_2$$

で，これに対応する水平方向の変位 BF は

$$v_2 t_2 \cos\beta = R\sin\beta$$

である．両辺の積をとると

$$v_2^2 = \frac{gR}{\cos\beta}$$

を得る．軌跡の点 A と点 B の間のエネルギー保存則が

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mg(R + R\cos\beta)$$

を与えるので

$$\begin{aligned} v_1^2 &= v_2^2 + 2gR(1+\cos\beta) \\ &= \frac{gR}{\cos\beta} + 2gR(1+\cos\beta) \\ &= 2gR\left(1+\cos\beta+\frac{1}{2\cos\beta}\right) \end{aligned}$$

を得る．v_1 の極小値は微分を用いて計算できる．しかし，算術平均と幾何平均の間の不等式を使う，もっと簡単な方法がある：

$$\frac{1}{2}\left(\cos\beta+\frac{1}{2\cos\beta}\right)\geq\sqrt{\cos\beta\frac{1}{2\cos\beta}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

よって $\cos\beta+1/(2\cos\beta)$ の最小値は $\sqrt{2}$ に等しく，したがって $\beta=45°$ である．$\beta=0$ になるにはもっと大きな初速が必要である（$1.5>\sqrt{2}$ だから）．こうして，最小初速の軌跡が丸太に触れる場所は，丸太の最上点ではないことが実際にわかった．キリギリスの重力の位置エネルギーは，放物線の頂点では丸太の頂点でより大きいが，運動エネルギーと全エネルギーは，丸太の最上点で接触する軌跡の場合より小さくなる．

最小初速の数値は

$$v_1^{\min}=\sqrt{2gR(1+\sqrt{2})}\approx 2.2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

である．

注 1) 放物軌道の B より上の部分が丸太と交わらないことを示すのは，とくに難しいことではない．

2) 跳び上がる角度は $\theta=3\pi/8=67.5°$，跳び上がる位置は

$$\mathrm{AD}=R(1+2/\sqrt{2})\approx 17\,\mathrm{cm}$$

であることも導ける．

3) 点 F が放物線の焦点であることは興味深い事実である．

S39 蚤は，髪の毛のはじめの方向と角 $\frac{1}{2}(\pi-\theta)$ をなす方向に跳ぶ．撃力の偶力（トルク）を受けた髪の毛は，蚤が空中にいる間に，蚤とは反対向きに角 $\pi-\theta$ だけ回転し，2 匹は髪の毛に着地するが，そこは跳び出した所とは反対側の端である．

v と α をそれぞれ跳び出しの速さと仰角とし，$2L$ を髪の毛の長さとする．跳んでいる時間 t は周知のように $2v\sin\alpha/g$ で，跳躍距離は $vt\cos\alpha$ である．図 S39.1 からわかるように，跳躍距離は $2L\sin(\theta/2)$ とも等しくなくてはならない．

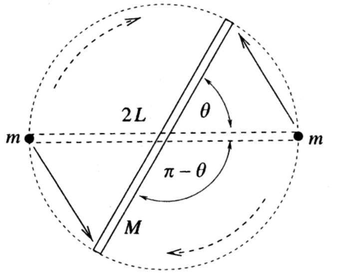


図 S39.1

ところで髪の毛の両端は撃力を受けるが，その接線成分の水平部分だけが，髪の毛に働く撃力の偶力に寄与する．ゆえに

$$2mvL\cos\alpha\cos\frac{\theta}{2} = I\omega \qquad (ここで\ I = \frac{1}{3}ML^2)$$

が成り立つ（角運動量の保存則，ω は髪の毛の回転の角速度）．$\omega t = \pi - \theta$ も必要である．

以上得られた表式から α，t，ω を消去すれば，θ が式

$$\frac{6m}{M}\sin\theta + \theta = \pi$$

を満たさねばならないことがわかる．

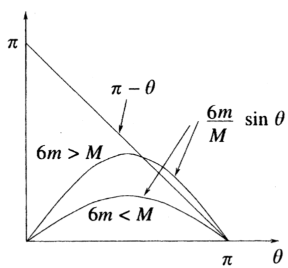


図 S39.2

関数 $f(\theta) = n\sin\theta + \theta$ は，n の値によらずに $f(\pi) = \pi$ という性質をもつ．さらに，$n > 1$ ならば，$f'(\theta) = n\cos\theta + 1 = 0$ は $0 < \theta < \pi$ に解をもつ．ゆえに，n が 1 より大きければ，$f(\theta)$ は π より小さな θ で最大値をとる．$f(\pi)$ について上で述べたことと合わせれば，$n > 1$ ならば，$f(\theta) = \pi$ が π より小さい解 θ をもつことがわかる．今の問題では，この条件は $m > M/6$ になる．この事情を図 S39.2 に示してある．

S40　水の'鐘'は鉛直軸に関して軸対称なので，一つの断面を考えて問題を解けば十分である．x–y 座標系の原点に点状の散水口があるとしよう．このとき水流は原点から始まる放物線の経路をたどる．我々の数学的課題は，この放物線の集合の'包絡線'（図 S40 の破線）を求めることである．

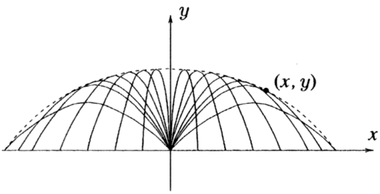


図 S40

周知のように，水平と角 α の方向に初速 v で飛び出した物体の経路の式は

$$y = x\tan\alpha - \frac{g}{2v^2\cos^2\alpha}x^2$$

である．これは，$u = \tan\alpha$ とおくと

$$\frac{gx^2}{2v^2}u^2 - xu + \left(y + \frac{gx^2}{2v^2}\right) = 0$$

と書ける．

点 (x, y) を固定すると，上式は u に関する 2 次方程式であり，u が実根をもつのは判別式が負でないとき，つまり

$$x^2 - 4\frac{gx^2}{2v^2}\left(y + \frac{gx^2}{2v^2}\right) \geq 0$$

すなわち

$$y \leq \frac{v^2}{2g} - \frac{g}{2v^2}\,x^2$$

のときである．この不等式は x–y 平面を，一つの放物線によって二つの領域に分ける．水はこの放物線 (3 次元では回転放物面) の下側の点には来ることができるが，上側には来ることができない．この境界の放物線が，求める包絡線である．

したがって水の ‘鐘’ は回転放物面である．境界の曲線の式から明らかなように，水の ‘鐘’ の高さは $v^2/(2g)$ である．これは，鉛直上方に投げた物体を考えても，予想できたことである．水の ‘鐘’ は，たらいの水面上に一つの円を定義する．その半径は，条件 $y = 0$ から $r = v^2/g$ と出る．すなわち，水がたらいの外に出ないためには，たらいの直径は，水の ‘鐘’ の高さの少なくとも 4 倍はなければならない．

S41　水平方向，鉛直方向ともに一様な加速度があるので，自明な記号を用いて

$$x = vt\cos\theta + \frac{1}{2}\frac{EQ}{m}\,t^2 \qquad \text{および} \qquad y = vt\sin\theta - \frac{1}{2}\,gt^2$$

である．$y = 0$ のとき，t を消去すればヒントで与えた到達距離の式が得られる．この距離は，$\tan 2\theta = -mg/(EQ)$ のとき，最大値

$$\frac{v^2}{mg^2}\left(EQ + \sqrt{m^2g^2 + E^2Q^2}\right)$$

をとる．正の Q の場合に $\tan 2\theta$ が負の符号をもつのは，電場がもたらす ‘追い風’ を利用するためには，θ は $\pi/4$ より大きい必要があるからである．

注　この問題が，斜面上で一定の初速で投げた質点の最大到達距離を求める問題と，本質的に同等なことは明らかだろう．

S42　棒のつり合いの条件，すなわち鉛直方向の合力とトルクの和がどちらもゼロという条件を満たすために，棒の質量中心 (CM) から距離 x および y の所に指があるとき，指が棒に及ぼす抗力は

$$F_x = mg\,\frac{y}{x+y} \qquad \text{および} \qquad F_y = mg\,\frac{x}{x+y}$$

である（図 S42 参照）.

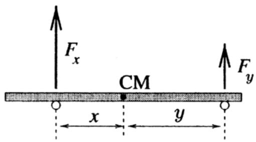


図 S42

まず棒が左手の指の上を滑るとする．任意の時刻にこの指に働く摩擦力は

$$F_{\mathrm{fr}} = \mu_{\mathrm{kin}}\, F_x = \mu_{\mathrm{kin}}\, mg\, \frac{y}{x+y}$$

である．動きがおそく，水平方向の加速度が無視できるときには，この力は右手の指に働く静止摩擦力に等しい．その最大値は

$$\mu_{\mathrm{stat}}\, F_y = \mu_{\mathrm{stat}}\, mg\, \frac{x}{x+y}$$

だから，左手の指は

$$\mu_{\mathrm{kin}}\, y \le \mu_{\mathrm{stat}}\, x \qquad \text{すなわち} \qquad x \ge ky$$

である限り滑ることができる．ここで $k = \mu_{\mathrm{kin}}/\mu_{\mathrm{stat}} \le 1$ である．

はじめは $x_0 = y_0 = \ell/2$ だから，左の指は $x = x_1 = k\ell/2$ の位置まで滑り，その間，指は連続的に変化する摩擦力に抗して仕事をする．この滑りの間になされる仕事は積分で求められる：

$$\begin{aligned} W(x_0 \to x_1) &= -\int_{x_0}^{x_1} \mu_{\mathrm{kin}}\, F_x\, \mathrm{d}x \\ &= -\mu_{\mathrm{kin}}\, mg \int_{\ell/2}^{k\ell/2} \frac{\ell/2}{x + (\ell/2)}\, \mathrm{d}x = mg\mu_{\mathrm{kin}}\, \frac{\ell}{2} \ln \frac{2}{k+1} \end{aligned}$$

次の段階では右指が滑る．その間 $x = x_l$ は一定で，y は $\ell/2$ から $y_1 = kx_1 = k^2\ell/2$ まで変化する．

なされる仕事は

$$W(y_0 \to y_1) = -\int_{y_0}^{k^2 y_0} \mu_{\mathrm{kin}}\, mg\, \frac{x_1}{x_1 + y}\, \mathrm{d}y = mg\mu_{\mathrm{kin}}\, \frac{\ell}{2}\, k \ln \frac{1}{k}$$

である．同様にして，棒が引き続き左指と右指の上を交互に滑る，全段階での仕事が計算できる．なされる仕事の総量は

$$\begin{aligned} W &= mg\mu_{\mathrm{kin}} \frac{\ell}{2} \left[\ln \frac{2}{k+1} + (k + k^2 + k^3 + \cdots) \ln \frac{1}{k} \right] \\ &= mg\,\mu_{\mathrm{kin}} \frac{\ell}{2} \left[\ln \frac{2}{k+1} + \frac{k}{1-k} \ln \frac{1}{k} \right] \end{aligned}$$

である．

もし $\mu_{\mathrm{kin}} \ll \mu_{\mathrm{stat}}$（すなわち $k \ll 1$）なら，仕事はただ一つの段階でなされ，その値は

$$W \approx \frac{\mu_{\mathrm{kin}}\, mg}{2}\, \ell \times \ln 2$$

となる．一方 $\mu_{\mathrm{stat}} \approx \mu_{\mathrm{kin}}$（すなわち $k \approx 1$）の場合には，

$$\frac{k}{1-k} \ln \frac{1}{k} \approx 1$$

が成り立つ．これは電卓でも確かめられるし，$k = 1-\delta$ と書いて $\ln(1-\delta) \approx -\delta$ を用い，$\delta \to 0$ としても確認できる．ゆえに

$$W \approx \frac{\mu_{\mathrm{kin}}\, mg}{2}\, \ell$$

となる．

S43　煉瓦の長さを単位長とし，ずらす過程を一番上から始める．一番上の煉瓦は，机から半分突き出るまでずらせる．次に上の 2 個を，3 番目の煉瓦に対して動かさねばならない（図 S43 (次ページ) 参照）．上の 2 個の煉瓦を一まとめにしたものの重心が，3 番目の端からはみ出してはいけない．ゆえに 2 番目の煉瓦は $\frac{1}{4}$ しかずらせない．積み重ねた煉瓦を，その全体の重心がすぐ下の煉瓦の端の上に来るまで動かす，というのが一般的な戦略である．

3 回目の移動の前に，上の 3 個の煉瓦を一まとめにしたものの重心を，求めておかねばならない．上の 2 個の煉瓦の全体の重心は 3 番目の端の上にあり，そ

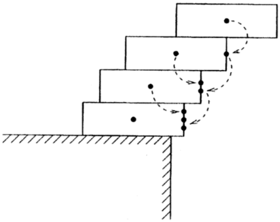


図 S43

れに 2 倍の重みがかかる．すなわち距離 $\frac{1}{2}$ を $2:1$ の比に分けるので，3 番目の煉瓦は $\frac{1}{6}$ しかずらせない．

その下（4 番目）の煉瓦については，その端の上に乗っている煉瓦は 3 倍の重みをもつので，4 番目の煉瓦の重心からその端までの距離 $\frac{1}{2}$ を，$3:1$ の比に分けねばならない．すなわち 4 番目の煉瓦は $\frac{1}{8}$ しかずらせない．ずれを足し合わせた結果は $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{25}{24}>1$ である．言い換えると，一番上の煉瓦は，机の外へはみ出すことができる．

上の解では，各段階で，不安定になる寸前のつり合いの位置を考えた．現実には，ずれは上の計算よりすこし少なくとらねばならないが，それでも一番上の煉瓦が机の外へはみ出すことは可能である．

この解は，煉瓦の個数について制限なしに拡張できる．$(k-1)$ 個の煉瓦全体の重心が k 番目の煉瓦の端の上にあるので，k 番目の煉瓦の重心と端の距離 $\frac{1}{2}$ は，$(k-1):1$ に比例配分されねばならない．それゆえ k 番目の煉瓦は，最大 $\frac{1}{2k}$ 単位までずらすことができる．全部で n 個の煉瓦があれば，一番上の煉瓦のずれは

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{k}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

と計算できる．自然数の逆数の和は

$$\begin{aligned}
&1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\cdots\\
&>\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots
\end{aligned}$$

を考えればわかるように無限大に近づくので，適当な個数の煉瓦を使えば任意のずれが実現できる．つまり限界はない．

S44　板の質量を $2m$ とし，図 S44.1 のように，垂直抗力を N_1，N_2，摩擦力を F_1，F_2 で表す．水平方向と鉛直方向の力のつり合いの式は

$$N_1 + F_2 = 2mg, \qquad F_1 = N_2$$

である．

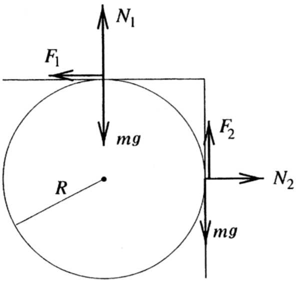


図 S44.1

板の曲がり角に関するトルクのつり合いから

$$(mg + N_2)R = N_1 R$$

が成り立つ．摩擦力に対する条件は

$$F_1 \leq \mu N_1 \qquad \text{および} \qquad F_2 \leq \mu N_2$$

である．これらの式を使うと，次の三つの関係式を導くことができる．

$$F_1 + F_2 = mg$$

$$F_2 \leq \mu F_1$$

$$F_1 \leq \mu N_1 = \mu(mg + N_2) = \mu mg + \mu F_1 \qquad \text{すなわち} \qquad F_1 \leq \frac{\mu mg}{1 - \mu}$$

最後の関係式を導くとき，$\mu < 1$ と仮定した．

この三つの関係式は F_1–F_2 座標系で表せる．図 S44.2 は静止摩擦係数がかなり大きい場合を示す．

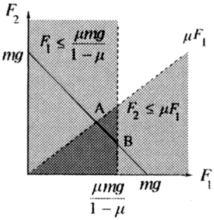


図 S44.2

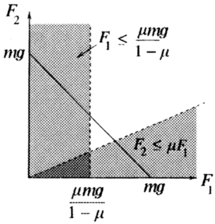


図 S44.3

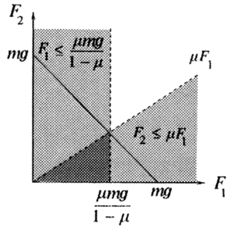


図 S44.4

この場合，問題の解は一意的ではない．点 A と B の間の線分の領域にある摩擦力は，つり合いの条件を満たすことができる．

静止摩擦係数が小さすぎると，図 S44.3 が示すように問題は解をもたない．可能な静止摩擦係数の最小値は，二つの不等式の境界の交点が，直線 $F_1 + F_2 = mg$ の上に乗るという条件から求めることができる（図 S44.4 参照）．このときは不等式のかわりに等式が使えて，少し計算すると静止摩擦係数の最小値が $\mu = \sqrt{2} - 1 \approx 0.414$ であることがわかる．

F_2 が負になる可能性も認めなければならない．μ が 0.5 より大きいと F_1 の上限値は mg より大きく，図 S44.5（次ページ）に示すように F_2 は負の値をもつことができる．

訳注　負の F_2 は物理的でないので，実現するはずはない．不静定の問題の解は，全部が現実に対応するわけではない．

S45　空気抵抗は無視し，球は完全に弾性的だと考える．球を高さ h から落とすと，球は地面に速さ $v = \sqrt{2gh}$ で達する．下の球が先に地面にあたり，それから上の球と衝突する．下の球がこの 2 回の衝突後静止すれば，上の球は最大のエネルギーを受け取る．

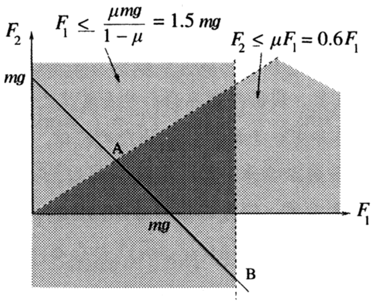


図 S44.5

下の球は速さ v で跳ね返り，速さ $-v$ で下向きに動いてきた上の球と衝突する．衝突後，質量 m_2 の球の速さはゼロになるので，運動量とエネルギーの保存を表す式は

$$(m_2 - m_1)\,v = m_1 u \qquad \text{および} \qquad (m_1 + m_2)\,\frac{v^2}{2} = m_1 \frac{u^2}{2}$$

となる．衝突後の上の球の速さ u と質量比はこの式から計算でき，$u = 2v$ および $m_1/m_2 = \frac{1}{3}$ とでる．跳ね返りによって速さは 2 倍になるので，上の球は高さ $4h$ まで上がる．

意外にも，上の球はこれよりもさらに高く跳ね返ることができる．$m_2 \gg m_1$ ならば，衝突後，上の球は全エネルギーのごく小さな割合しか受け取らないが，速さは $3v$ で，跳ね返る高さは，理想的な場合には $9h$ である．これは信じ難いかもしれないが，エネルギー保存則と合っている．

理論的な問題に関心のある読者は，n 個の球に問題を一般化してもよかろう．実際的な実験に関心のある読者は，いくつかの異なる球をいっしょに落としてみるとよい．非常に面白い跳ね返り方をする．

S46　第一の衝突では，運動量とエネルギーの保存は

$$M\sqrt{2gh} = MV + \mu v$$
$$Mgh = \frac{1}{2}\,MV^2 + \frac{1}{2}\,\mu v^2$$

を与える．V を消去すれば v が $2M\sqrt{2gh}/(M+\mu)$ と得られる．中央の球に伝えられる運動エネルギーは $4\mu M^2 gh/(M+\mu)^2$ で，最初の球の衝突前のエネルギーに対する割合は $4\mu M/(M+\mu)^2$ である．最後の球に伝えられるエネルギーの割合は，この表式と，質量の組み合わせを変えた同様な表式の積である．ゆえに，最後の球のエネルギーを最大にするためには，$\mu^2/(\mu+M)^2(\mu+m)^2$ を最大にするように μ を選ぶべきで，これは $\mu=\sqrt{Mm}$ である．こう選ぶと，最初から最後までのエネルギー伝達の割合は $16Mm/(\sqrt{M}+\sqrt{m})^4$ で，最後の球が到達する高さは $16M^2h/(\sqrt{M}+\sqrt{m})^4$ となる．

S47 ダンベルは同じ速さでたがいに近づくので，エアクッション面の座標系（全体の質量中心系と同じ）では，運動量の和はゼロである．ゆえに運動量の保存則は，各ダンベルの質量中心が，常に同じ速さで反対向きに動くことを意味する．

ダンベルの衝突は完全弾性的で，また外力は働かないので，系のエネルギーと角運動量はともに保存する．衝突の前後の様子を図 S47.1 に示す．

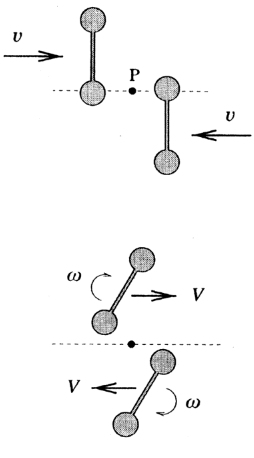


図 S47.1

衝突前は，ダンベルは並進運動のエネルギーだけをもつが，衝突後は，回転の項が現れる．ダンベルのエネルギーと角運動量の保存則の式を書き下すとき，角運動量は，ダンベルの接触点Pに関するものを計算する．エネルギー保存則は

$$2\left(\frac{1}{2}2mv^2\right) = 2\left(\frac{1}{2}2mV^2 + \frac{1}{2}2m\ell^2\omega^2\right)$$

である．衝突前はダンベルは軌道角運動量しかもたないが，衝突後は各々の質量中心のまわりの自転の項を含めねばならない．それゆえ角運動量保存則は

$$4\ell mv = 4\ell mV + 4m\ell^2\omega$$

となる．

上の連立方程式の自明でない解（$V \neq v$, $\omega \neq 0$）は，$V = 0$, $\omega = v/\ell$ である．すなわち，ダンベルの各質量中心は衝突後は動きを止め，衝突した質点どうしは速度を交換するが，衝突しない方の質点ははじめの速度を保つ．これは次のように解釈できる．質量のない剛体棒で結ばれた二つの質点は，瞬間的な衝突の間は，たがいに相手の質点の存在を知らない．棒が力を及ぼすのは衝突の直後からで，それによりダンベルは，静止した質量中心のまわりで回転する．

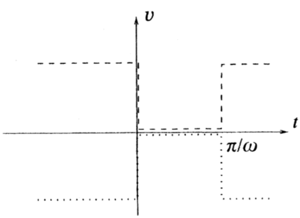


図 S47.2

この問題に隠された興味ある点は，ダンベルは半回転後，つまり時間 $t = \pi/\omega$ の後，ふたたび衝突することである．上の結果を用いれば，この後起きる運動は式を書かなくても予言できる．回転は止まり，ダンベルは最初の衝突の前と同じ速さで，ふたたび動き始める．軌道は同じ直線だが，ダンベルは‘ひっくり返って’進む．別の言い方をすれば，ダンベルは2回の衝突の間の時間を，向きを変えるのに使う．ダンベルの速さを時間の関数として図 S47.2 に示す．

S48 1) 時刻 $t=2L/V$ に，質量中心系では，2 物体は x 軸に平行に進行中で，y 軸をたがいに反対向きに横切っている．この動きを，質量中心の運動に重ね合わさねばならない．質量中心は直線 $x=L/2$ 上を，y 方向にそれまで距離 L だけ動き，速さ $V/2$ をもつ．物体 A は位置 $(\frac{1}{2}L,\frac{1}{2}L)$ にいて速度 $(\frac{1}{2}V,\frac{1}{2}V)$ をもち，物体 B は位置 $(\frac{1}{2}L,\frac{3}{2}L)$ にいて速度 $(-\frac{1}{2}V,\frac{1}{2}V)$ をもつ．

2) 質量中心系での運動は，周期 $8L/V$ の周期運動であることを確かめよ．物体 A は位置 $(L,50L)$ にいて速度 $(0,V)$ をもち，物体 B は位置 $(0,50L)$ に静止している．

訳注 2 物体の質量中心が原点に静止する質量中心系では，2 物体は，二つの座標軸と平行な長さ L の辺をもつ正方形の辺の上を，速さ $V/2$ で反時計回りに動く．ただ，質量中心系での軌道がこのように閉じた形をとるのは，本問で与えたような例外的な初期条件の場合に限られる．そのことは，本問の運動が，直径 $\sqrt{2}L$ の円の内部で，壁と弾性衝突をくり返しながら等速直線運動をする，質点の 2 次元運動と等価であることに気がつけば明らかだろう．軌道が正方形になるような初期条件を厳密に与えることは現実には不可能だから，上の周期運動は，数学的には興味深いが，物理的には実現しない運動といってよかろう．

S49 現在の水位と容器の高さの比を x で表す．この値は，現在の水の体積と可能な最大体積の比でもある．

注水中は，x は時間に比例して増していき，時間 T_1 で $x=1$ になるから

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{in}}=\frac{1}{T_1}$$

である．

水が流れ出すときは，流出の速さ，つまり x の減り方は，水柱の高さの平方根，すなわち x の平方根に比例する：

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{out}}=-K\sqrt{x} \tag{1}$$

比例係数は，時間 T_2 で x が 1 から 0 まで減るように選ばねばならない．

流出の式は，等加速度運動における速さと変位の関係 $v=\sqrt{2ax}$ と同じ形の式だから，水位がゼロまで減る間の速さは，一様な割合で変わると結論できる．

x の減少率ははじめは K で終わりはゼロだから，x の平均減少率は $K/2$ に等しい．この減少率を排水の時間で表せば $K/2 = 1/T_2$ となる．同じ結論は，微分方程式 (1) を積分し，初期条件と最終条件を課しても得られる．

注水口と排水孔の両方を開いたときは，注水と排水による水位の変化率は

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{in}} + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{out}} = \frac{1}{T_1} - \frac{2}{T_2}\sqrt{x}$$

となる．

平衡状態では水位は変化しない．これに対する条件は

$$x = x_{\mathrm{e}} = \left(\frac{T_2}{2T_1}\right)^2$$

である．たとえば，容器が満水になる時間と空になる時間が同じなら ($T_1 = T_2$)，注水口と排水孔を両方開けたときの平衡状態は，初期条件に関係なく $x = \frac{1}{4}$ である．問題に与えられたデータの場合は，この比は $\frac{1}{9}$ である．あふれるおそれがあるのは，容器を空にする時間が満水にする時間の 2 倍以上のとき ($T_2 > 2T_1$) だけだということもわかる．

注　流出に関するトリチェリの定理が成り立つための一つの条件は，孔の大きさ（直径）が水深に比べてずっと小さいことである．この条件は容器がほとんど空になるともちろん満たされなくなるので，上の結論は近似的なものにすぎない．孔が非常に小さいと，(これまで無視してきた) 水の粘性も重要な役割を果たす．

S50　容器が回転しているとき，液体の自由表面は系の等ポテンシャル面でなければならない．というのは，もしそうでないと，系のエネルギーは表面の形を変えれば低くできるからである．円柱座標が (r, z) の点での，単位体積あたりの全ポテンシャルエネルギーは，二つの項，すなわち重力のポテンシャルエネルギー $\rho g z$ と遠心力のポテンシャルエネルギーからなる（ρ は液体の密度）．遠心力は軸から離れる向きで，大きさは $\rho\omega^2 r$ だから，r でのポテンシャルエネルギーはこれを r について積分したもの，すなわち $-\frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2$ である．どちらのポテンシャルも，それをゼロにする基準点は任意である．z の原点は ヒント にあるように選び，また遠心力ポテンシャルのゼロ点は $r = 0$ にとると，自由表面の方程式は $\rho g z - \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 = 0$ となる．

液体があふれ出す寸前のときの，容器の縁から表面の最下点までの垂直距離を Z とすると，点 (a, Z) は自由表面上にある．容器内で液体の上にある空気の体積は，容器の体積の $\frac{1}{3}$ のままである．この体積を求める積分 $\int_0^Z \pi r^2 \mathrm{d}z$ は，$r^2 = 2gz/\omega^2$ より $\pi g Z^2/\omega^2$ となる．ゆえに

$$Z = \frac{\omega^2 a^2}{2g} \qquad \text{および} \qquad \frac{\pi g Z^2}{\omega^2} = \frac{\pi a^2 h}{3}$$

で，これより $\Omega = (4gh/3a^2)^{1/2}$ を得る．

S51 解答 1 加速中，車は地球を少し‘押し返し’，地球の角速度を変化させる．パラドックスの解消には，このきわめて小さな効果を考慮しなければならない．

簡単のため，車の運動方向に自由に動ける質量 M の物体の上を，質量 m ($m \ll M$) の車が進むモデルを考えよう．これは，実際には地球が車の下で自由に回転できることに相当する．静止している観測者が見ると，車がある速さ v_0 に加速し，ついで $2v_0$ に加速するとき，質量 M の物体は速さが $u_1 = -mv_0/M$ に達し，ついで $u_2 = -2mv_0/M$ に達する．それにより物体の運動エネルギーは，はじめのゼロから $M{u_1}^2/2$ へ，そして $M{u_2}^2/2$ へ増加する．$M \gg m$ だから，重い方の物体の運動エネルギーとその変化量は無視できる．ゆえに，燃料消費量の比は 1 : 3 でなければならない．

速さ v_0 で動いている観測者にとっては事情は異なる．この人が見ると，車の速さは v_0 から $2v_0$ に増え，ついで $3v_0$ に増える．その間，運動量の保存則によって，重い物体の速さは，はじめの v_0 から $(1-m/M)\,v_0$ へ，そして $(1-2m/M)\,v_0$ へ変わる．それゆえ全系（車と地球）の運動エネルギーの変化は，第一段階では

$$\frac{1}{2}\,m[(2v_0)^2 - {v_0}^2] + \frac{1}{2}\,M\left(1 - \frac{m}{M}\right)^2 {v_0}^2 - \frac{1}{2}\,M{v_0}^2 \approx \frac{1}{2}\,m{v_0}^2$$

で，続いて第二段階では

$$\frac{1}{2}m[(3v_0)^2 - (2v_0)^2] + \frac{1}{2}M\left(1 - \frac{2m}{M}\right)^2 {v_0}^2 - \frac{1}{2}M\left(1 - \frac{m}{M}\right){v_0}^2 \approx \frac{3}{2}m{v_0}^2$$

である．

どちらの観測者にとっても，エネルギー（燃料消費量）の比は1 : 3であることがわかる．

解答2　摩擦は地面を後ろ向きに押す．つまり，摩擦は車輪を通して車を加速する．地球の座標系（ピーターの系）では，仕事は車にだけされ，地面にはされない．他方，列車の座標系（ポールの系）では，地面に働く静止摩擦力も仕事をする．この系でみれば，時間 t の間の車の変位は，二つの段階でそれぞれ $3v_0t/2$ と $5v_0t/2$ だから，車にされる仕事の比は3 : 5である．地面にされる仕事は，地面の変位が v_0t だから -2 単位である．ゆえにされる仕事の総量は，加速の第一段階では $3-2=1$ 単位，第二段階では $5-2=3$ 単位である．したがって，列車から見たときも，仕事の比はやはり1 : 3である．

S52　レンズから物体（光源）までの距離 u と像までの距離 v は，レンズの公式の中で入れ替えられるので，その比の2乗が像の大きさの比を $(v/u)^2=9$（または $\frac{1}{9}$）と与える．これは $v/u=3$（または $\frac{1}{3}$）を意味する．ゆえに物体までの距離は30 cm（または90 cm）で，像までの距離は90 cm（または30 cm）である．焦点距離はレンズ公式から $f=22.5\,\mathrm{cm}$ と計算できる．

もし二つの場合とも同じ量の光がレンズを通るならば，9倍小さな像は81倍明るいはずである．というのは，小さな像はスクリーン上で，大きな像の81倍小さな面積を占めるからである．ところがレンズが光源から遠くにある場合は，近くにある場合に比べ，レンズは $\frac{1}{9}$ しか光を受け取らない．結局，小さな像は大きな像より9倍明るくなるだけである．

一般に，このような一対の像に対しては，小さな像と大きな像の明るさの比は，常に，1次元的な大きさの比の逆数に等しいことが示せる．

S53　近視の人の眼鏡のレンズは凹レンズである．$-f$ を凹レンズの（負の）焦点距離，d を物体と眼の距離，O を物体の大きさとする（図S53参照）．レンズの公式によると，物体とレンズの間の距離を u とすれば，（虚）像とレンズの間の距離 v は

$$\frac{1}{-v}+\frac{1}{u}=\frac{1}{-f}\qquad \text{すなわち}\qquad v=\frac{uf}{u+f}$$

で与えられる．一方，像の大きさは

$$I = \frac{v}{u} O = \frac{f}{u+f} O$$

である．

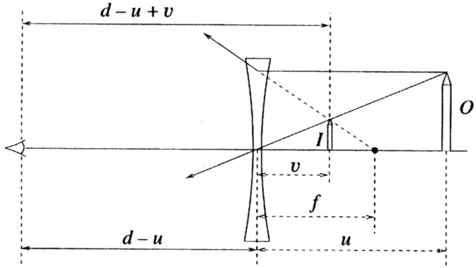


図 S53

像の見かけの大きさは，像が目に対して張る角 ϕ で決まり，像が小さければそれは

$$\phi = \frac{I}{d-u+v} = \frac{f}{u(d-u)+fd} O$$

である．この角は，u の関数としては，上式の右辺の分母が最大のとき最小値をとる．この条件は $u = d/2$ のとき満たされる．言い換えると，物体の見かけの大きさは，レンズが眼と物体から等距離にあるとき，最小になる．この条件がレンズの焦点距離によらないことは興味深い．

S54　ヒント で定義した ϕ を用いると，入射光線がガラスに入る点でのスネルの法則は $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = n_{\mathrm{g}} \sin\phi$ と書ける．光線がガラスと水の境界面に達した点で，境界面の法線と光線の間の角は，簡単な幾何により $\theta + \phi$ であることがわかる．

全反射が起きるためには，この角が $\sin^{-1}(n_{\mathrm{w}}/n_{\mathrm{g}})$ より大きくなければならない．上の二つの条件を連立させ，公式 $\sin(\theta+\phi) = \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi$

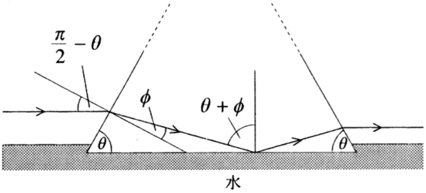


図 S54

を使って ϕ を消去すれば

$$n_{\mathrm{g}}^2 - n_{\mathrm{w}}^2 \geq \cos^2\theta\,(n_{\mathrm{g}}^2 + 1 - 2n_{\mathrm{w}})$$

を得る．屈折率に与えられた値を代入すれば，問題にある結果がでる．

S55　光のビームを平行光線の集まりと考える．光線は方向を変えずに四分円柱の鉛直面を通り，いろいろな入射角で円柱曲面に入射する．光線が入射する点での曲面の法線方向は，円柱の半径方向である．

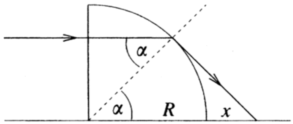


図 S55

四分円柱に入射する光線の位置が高いほど，円柱曲面での入射角は大きくなる．図 S55 に示した光線の入射角は，全反射の臨界角である．ゆえにこれより机に近い光線だけが，四分円柱から（異なる角で屈折されて）出て来ることができる．臨界角は図を用いて求めることができる：

$$\sin\alpha = \frac{1}{n} = \frac{2}{3} \qquad \text{および} \qquad \frac{R}{R+x} = \cos\alpha$$

これより $x = 1.71\,\mathrm{cm}$ がでる．これが光が机に到達できる，四分円柱にもっとも近い点である．

机の面に近い光線ほど，入射角は小さくなるので，屈折による元の方向からのずれは小さくなり，机の面の遠くの点に到達できるようになる．机の面すれすれに進む光線の方向は変わらないので，原理的には，光はどんな距離の点にも到達できると思いがちだが，これは誤りである．各光線の光路は，たとえば入射角をパラメーターとして表すことができ，それによって，光線は机の上のあまり遠方には到達しないことが示せる．

面倒な計算をしないでも，簡単な‘技巧’で，光の像の，もっとも遠い点を求めることができる．四分円柱の机に近い部分を平凸レンズとみなそう．このレンズを，平行平面板と薄い平凸レンズの組み合わせとみれば，前者は何の働きもしないので無視できるから，平凸レンズの焦点距離を薄いレンズの公式を使って，次のように計算できる：

$$\frac{1}{f} = \frac{n-1}{R}$$

これより $f = 10\,\mathrm{cm}$ となり，これが広がった光の像の，四分円柱からもっとも離れた点までの距離である．

S56　R_M を月の半径，R を月と地球の間の距離とすると，立体角 2π に乱反射される光のエネルギーは，単位時間あたり $\alpha\pi R_\mathrm{M}^2 E$ である．ここで E は太陽から直接来る光の強度である（地球上と月面上で同じ）．地球上で月の光として受ける強度は，これを $2\pi R^2$ で割ったものである．月の視直径は，地球表面ではおよそ $\frac{1}{2}^\circ$，つまり $9\times10^{-3}\,\mathrm{rad}$ だから，太陽から直接来る光に対する月の光の強度の比は

$$\frac{\alpha R_\mathrm{M}^2}{2R^2} = \frac{0.07}{2}\times\frac{1}{4}\times(9\times10^{-3})^2 \approx 10^{-6}$$

である．ゆえに太陽の光は月の光より約百万倍明るい．

注　実は月の反射率は，太陽の光と月の光の明るさを比べることで測定された．さらに地球のアルベドを，地球からの反射光で照らされた新月の暗い部分の (きわめて小さな) 輝度を測って，同様に決めることができた．

S57　快適な歩行を，人の脚が自由に振れる，振り子のモデルで近似しよう．

上端を固定した実体振子の自由振動の周期は

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgs}}$$

である．ここで，I は物体の慣性モーメント，m は物体の質量，s は支点と物体の重心の間の距離である．この周期を

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L_{\mathrm{eff}}}{g}}$$

と表すような，いわゆる有効長 $L_{\mathrm{eff}} = I/ms$ を導入する．有効長は，脚の実際の長さ L に比例すると仮定できる．脚の長さが同じ人たちの間では，有効長の差はごくわずかしかないだろう．

固有周期についてのこの結果を用いると，筋肉の働きを最小にするような，その人に固有な歩行速度を見積もることができる．第一近似として，歩幅は足の長さに比例すると仮定する．一歩の時間は前述の周期の半分なので，歩行の速さ v_{walk} は

$$v_{\mathrm{walk}} \propto \frac{L}{T/2} \propto \sqrt{L}$$

という形で脚の長さに依存する．この式によれば，脚の長い人ほど固有な歩行速度が速いことが予想できる．この予想は，エネルギーの最小の消費を仮定し，脚の長さ以外のあらゆるもの（たとえば体形や力の強さなど）の差を無視するという，極端に単純化したモデルに基づいている．しかし，この予想は一般的な経験により実証されている．

走る人を解析するときには，我々のモデルに重要な変更を加えねばならない．走っている間は，脚は自由に振れるのではなく，軸（脚のつけね）のまわりに加わるトルクに従う．このトルクは，筋肉が及ぼす力 F によりつくられる．この力は，関与する筋肉の断面積にほぼ比例する．体の大きさが異なっても，脚の体に対する相対的な割合は同じだと仮定すれば，筋肉の断面積は（したがって力は）長さ L の 2 乗に依存する．トルク τ は F と L の積に比例するので

$$\tau \propto FL \propto L^2 \times L \propto L^3$$

である．慣性モーメント I は長さの 2 乗と質量に比例する．ふたたび，どの人の脚も本質的には同じ形をもち，したがって脚の幅と厚みは長さに比例すると仮定すれば，質量は長さの 3 乗に比例し

$$I \propto mL^2 \propto L^5$$

となる．

周期的に働くトルクの下で，固定点のまわりで振動する物体に対しては，周期 T はトルクの最大値 τ と固定点に関する物体の慣性モーメント I に依存し

$$T \propto \sqrt{\frac{I}{\tau}}$$

で与えられることが一般的に示せる．（訳注　実体振子の式で，重力のトルクを τ で置き換えればよい．）I と τ に上の結果を代入すれば

$$T \propto \sqrt{\frac{L^5}{L^3}} \propto L$$

とわかる．走る速さは脚を進める振動数 f と一歩の長さの積なので

$$v_{\mathrm{run}} \propto f \times L \propto \frac{L}{T} \propto \frac{L}{L} = 1$$

となる．それゆえこのモデルの予想では，アニーとアンディの経験どおり，走る速さは脚の長さには依存 しない．この予想はもちろん厳密に正確なものではないが，それでも，ふつうに歩く速さは脚の長い人の方が脚の短い人より速いが，走る速さには目立つ差がないことが多い，という観察に，このモデルはある程度の説明を与える．

S58　長さ L の単振り子と，一端を回転軸にとりつけた長さ ℓ の一様な棒でできた振り子を考える．二つとも水平な位置から放すと，角 α まで振れたときの両者の角速度はどれだけだろうか．

エネルギー保存則から，単振り子では

$$\frac{1}{2}mL^2\omega^2 = mgL\sin\alpha \qquad \text{すなわち} \qquad \omega = \sqrt{\frac{2g}{L}\sin\alpha}$$

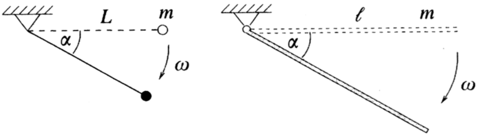


図 S58

であり，棒振り子では

$$\frac{1}{2}\frac{m\ell^2}{3}\omega^2 = mg\frac{\ell}{2}\sin\alpha \qquad \text{すなわち} \qquad \omega = \sqrt{\frac{3g}{\ell}\sin\alpha}$$

である．もし $L = \frac{2}{3}\ell$ なら，二つの運動の角速度は，α のすべての値に対して等しい．その結果，二つの運動はすべての時刻で同等で，周期は等しくなる．

この等価振り子の周期は，どのようにして計算できるだろうか．微小振動に対して成り立つ公式 $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ は，ここでは振幅が大きいので使えない．正確な計算には複雑な数学的解析が必要になるが，周期 T を計算するのではなく周期の L 依存性だけを決めたいなら，その必要はない．

単振り子の周期は，長さ L，おもりの質量 m，重力加速度 g および最大変位角 $\alpha_{\max}$ によるだろう．（訳注　上の α は水平からの振れの角度，この $\alpha_{\max}$ は鉛直からの振れの最大値だから混同しないこと．）含まれる量の次元を考えると，この関数依存性は

$$T(L, m, g, \alpha_{\max}) = f(\alpha_{\max})\sqrt{\frac{L}{g}}$$

という形しかあり得ない．それが正しいことをみるために，次の点に注意しよう．質量の次元は‘キログラム’であり，‘キログラム’は他のどの量の次元にも現れないから，（‘秒’の次元をもつ）周期がおもりの質量に依存することはできない．一方，‘秒’は g だけに現れるから，T に要求される次元の‘秒’は，T が g の平方根の逆数に比例するときにだけ得られる．最後に‘メートル’の次元を調整するために，周期は L の平方根に比例しなければならない．角度は無次元量だから，関数 $f(\alpha_{\max})$ の形は，次元解析からは決められない．わかっていることは，小さな角に対しては $f(\alpha_{\max}) \approx 2\pi$ だということだけである．

上の議論から，長さ $(2/3)\ell$ の単振り子の周期は，（同じ初期条件での）長さ ℓ の単振り子の周期の $\sqrt{2/3}$ 倍であることが導ける．それゆえ，長さ ℓ の棒振り子の周期は，同じ長さの単振り子の周期の約 82%である．この結論は水平から放されたときだけではなく，任意の共通の初期位置に対しても正しい．

S59 ヘリコプターのホバリングに必要な出力は，重力加速度 g，ヘリコプターの 1 次元的な大きさ L，ヘリコプターの平均密度 ρ_{hel}，空気の密度 ρ_{air} に依存する．

必要な機械的出力は上の量だけに依存し，依存の仕方はべき乗の関係

$$P \propto g^{\alpha} \times L^{\beta} \times \rho_{\mathrm{hel}}^{\gamma} \times \rho_{\mathrm{air}}^{\delta}$$

だという仮定は妥当であろう．左辺と右辺の次元は等しくなければならないので

$$\frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s^3}} = \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}\right)^{\alpha} \times \mathrm{m}^{\beta} \times \left(\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}\right)^{\gamma} \times \left(\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}\right)^{\delta}$$

これより

$$\begin{aligned} \gamma + \delta &= 1 \\ \alpha + \beta - 3(\gamma + \delta) &= 2 \\ -2\alpha &= -3 \end{aligned}$$

がでる．この 1 次連立方程式の解は $\beta = \frac{7}{2}$，$\alpha = \frac{3}{2}$，$\gamma = 1 - \delta$ である．

必要な機械的出力は，1 次元的な大きさ L の $\frac{7}{2}$ 乗に比例することがわかる．結局，2 機目のヘリコプターでは，エンジンの出力が $(1/2)^{7/2}P = 0.088P$ でなければならない．

注 1) 機械的エンジンの効率の特徴は，出力とエンジン質量の比で表される．上の結果によると，この‘比出力’は

$$\frac{P}{m} \propto \frac{P}{L^3} \propto \sqrt{L}$$

である．すなわち必要な効率は，1 次元的な大きさとともに増加する．これはヘリコプターが小さいほど，ホバリングが容易にできることを意味する．小さな動物の中に

は，ヘリコプターのようにホバリングできるものが多いが（蜂，トンボ，ハチドリなど），大きな鳥ではそれができない．

2)　単純な次元解析では，指数 γ と δ の和だけが見出せた．しかし，ヘリコプターがホバリングするとき問題になるのは，慣性質量ではなく重さだから，P はヘリコプターの密度と g の積にだけ依存することは明らかである．ゆえに γ は α と等しくなければならず，$\gamma = \frac{3}{2}$，$\delta = -\frac{1}{2}$ である．結局

$$P \propto (g\rho_{\text{hel}})^{3/2} \times L^{7/2} \times \rho_{\text{air}}^{-1/2} = (L^3 \rho_{\text{hel}} g) \times \sqrt{Lg} \times \sqrt{\frac{\rho_{\text{hel}}}{\rho_{\text{air}}}}$$

を得る．

この地球表面上では，変えることができるのは，ヘリコプターの大きさと密度だけである．しかしロボットヘリコプターを使う宇宙探査では，P が重力加速度と目的の惑星の大気密度にどう依存するかを知ることは，役に立つかもしれない．

S60　棒が角 θ 傾くまでに失われた重力の位置エネルギーは $Mg\frac{1}{2}\ell(1-\cos\theta)$ で，これは机の端での回転の運動エネルギーに変わる．この場合の棒の慣性モーメントは，直接計算するか平行軸の定理を使うかすれば，$\frac{1}{3}M\ell^2$ とわかる．この二つの結果を合わせて

$$\omega^2 = \frac{3g}{\ell}(1-\cos\theta)$$

が出る．向心加速度 a_c は ω^2 の $\ell/2$ 倍だから，$\frac{3}{2}g(1-\cos\theta)$ に等しい．同じ慣性モーメントと各瞬間のトルク $Mg\frac{\ell}{2}\sin\theta$ を使えば，棒の接線方向の加速度は $a_\text{t} = \frac{3}{4}g\sin\theta$ とわかる．

1)　滑らかな（摩擦のない）段差の水平な床と鉛直な壁は，それぞれ正の向きの鉛直な力 V と水平な力 H を棒の端に及ぼす（図 S60.1 参照）．どちらかの力がゼロになり，運動方程式からは力が負，つまり（物理的にはあり得ない）引力になることが要求されるとき，棒と机の接触はなくなる．

力と加速度の水平方向と鉛直方向への分解は

$$H = M(a_\text{t}\cos\theta - a_\text{c}\sin\theta)$$

$$Mg - V = M(a_\text{t}\cos\theta + a_\text{c}\sin\theta)$$

を与える．H と V に対するこの二つの方程式を解くと

$$H = \frac{3}{4}Mg\sin\theta(3\cos\theta - 2)$$

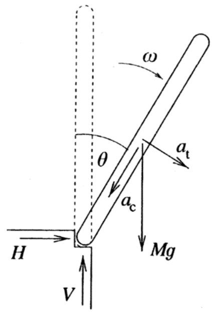


図 S60.1

$$V = \frac{1}{4}Mg(3\cos\theta - 1)^2$$

を得る．はじめにゼロになる成分は H の方で，これは $\theta = \cos^{-1}\frac{2}{3} \approx 48°$ のとき起こる．これより大きな角では H は負になるだろう．実際には，滑らかな段差は棒の端を引き戻せないから，棒は机から離れる．

2) 机の端は非常に小さな四分円なので，垂直抗力 N は常に棒の軸方向を向く．静止摩擦力 $F_{\rm fr}$ はこの四分円の接線方向を向き，粗い端のため任意の値をとれる (図 S60.2 参照)．

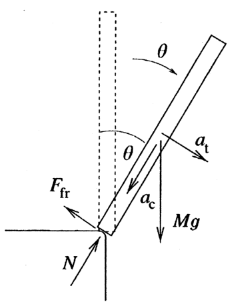


図 S60.2

棒の重さの軸方向の成分と，机の垂直抗力の代数和は，向心力を与える：

$$Mg\cos\theta - N = Ma_{\mathrm{c}} = M\frac{\ell}{2}\omega^2 = \frac{3}{2}Mg\,(1-\cos\theta)$$

よって垂直抗力は

$$N = \frac{Mg}{2}\,(5\cos\theta - 3)$$

と表せる．机が棒に及ぼす力は $N=0$ のとき，すなわち $\theta = \cos^{-1}\frac{3}{5} \approx 53°$ のときゼロになる．これより大きな角では垂直抗力は負になるはずだが，それは不可能なので，棒は机から離れる．粗い端のため，垂直抗力がゼロになるとき以外は，静止摩擦力は滑りを防ぐだけの大きさをもつ．そのため，摩擦力は運動には何の影響も及ぼさない．

注　この問題では，1) と 2) で表される二つの極端な場合を考えた．一般には，垂直抗力は机の端と棒の底面の共通接線に直交する．このことは，垂直抗力は実際上どんな方向にも働き得ることを意味する．すなわち棒が倒れる運動は，摩擦係数とともに，接触面の幾何的詳細にも強く依存する（P61 も参照）．

S61　まず，机の表面が非常に滑らかな（摩擦係数が非常に小さい）場合を考える．鉛筆から手を離した直後は，鉛筆の質量中心は倒れる方向に加速され，水平，鉛直両方向の速度を獲得する．加速度の水平成分は，鉛筆の先端と机の間の摩擦力によって生じるが，机の表面が滑らかなので，すぐに先端は倒れる方向とは反対向きに滑る．

摩擦が非常に大きければ，鉛筆はかなり長い間滑らない．円軌道上を動く質量中心の水平方向速度は，最初は倒れる向きに増えるが，その後減り始め，鉛筆が水平になるまでこのように動き続けるなら，水平方向速度はゼロに近づく．質量中心の水平方向加速度の符号が運動の途中で変わるので，摩擦力の符号も運動の途中で変わる．最初の段階で鉛筆が滑らないなら，鉛筆が滑ることができる方向は，‘前向き’，すなわち倒れる方向だけである．

以下では，鉛筆はどちら向きかに（‘後ろ向き’ か ‘前向き’ に）滑るが，先端は机から決して離れないことを証明する．式を簡単にするため，鉛筆の長さと質量および重力加速度は単位の値をもつとする：$\ell = M = g = 1$．それゆえ，

鉛筆の重さは 1，質量中心（CM）の端からの距離は $\frac{1}{2}$，鉛筆の CM に関する慣性モーメントは $\frac{1}{12}$，鉛筆の端に関する慣性モーメントは $\frac{1}{3}$ である．

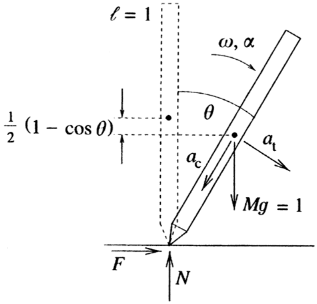


図 S61.1

運動の最初の段階では鉛筆の先端は滑らないので，鉛筆は先端のまわりで回転する（図 S61.1 参照）．鉛筆の角速度は，エネルギー保存則

$$\frac{1}{2}(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\omega^2$$

から $\omega = \sqrt{3(1-\cos\theta)}$ と決まる．各瞬間のトルク $\frac{1}{2}\sin\theta$ から，鉛筆の角加速度 α が決まる：

$$\frac{1}{2}\sin\theta = \frac{1}{3}\alpha \qquad \text{すなわち} \qquad \alpha = \frac{3}{2}\sin\theta$$

鉛筆に働く鉛直方向の力は，重さと机の垂直抗力 N の二つである．CM の向心加速度の鉛直成分は $\frac{1}{2}\omega^2\cos\theta$，接線方向加速度の鉛直成分は $\frac{1}{2}\alpha\sin\theta$ だから，運動方程式の鉛直成分は

$$1 - N = \frac{1}{2}\alpha\sin\theta + \frac{1}{2}\omega^2\cos\theta$$

である．これより

$$N = \left(\frac{3\cos\theta - 1}{2}\right)^2$$

がでる．この垂直抗力は決して負にならないので，回転運動の間は鉛筆の先端は机から離れないことがわかる．垂直抗力がゼロになるのは，$\theta = \cos^{-1}\frac{1}{3} \approx 70.5^\circ$ のときである．これは，この角度で摩擦力もゼロになることを意味するので，鉛筆は，それまでは滑っていなくても，ここで滑るだろう．

運動方程式の水平成分は，摩擦力を F とすれば

$$F = \frac{1}{2}\alpha\cos\theta - \frac{1}{2}\omega^2\sin\theta$$

である．この式に角加速度と角速度を代入して

$$F = \frac{3}{4}\sin\theta\,(3\cos\theta - 2)$$

を得る．滑る条件は，(静止) 摩擦係数を μ として，$|F| > \mu N$ である．力の比 F/N の絶対値で定義される関数 $f(\theta)$ を使って，滑るための条件を次のように表すことができる：

$$f(\theta) = \left|\frac{F}{N}\right| = \left|\frac{3\sin\theta\,(3\cos\theta - 2)}{(3\cos\theta - 1)^2}\right| > \mu$$

図 S61.2 に関数 $f(\theta)$ を示す．

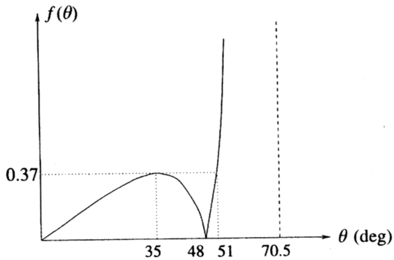


図 S61.2

摩擦力は $\theta = \cos^{-1}\frac{2}{3} \approx 48^\circ$ で符号を変える．そのため，領域 $0 < \theta < 48^\circ$ では‘後ろ向き’の滑りが起き得る．数値解析により，この領域では，$f(\theta)$ は角 $\theta \approx 35^\circ$ で極大値 $\mu_{\rm crit} \approx 0.37$ をとることが示せる．これは $\mu < \mu_{\rm crit}$ ならば鉛筆は‘後ろ向き’に滑ることを意味する．

$\mu > \mu_{\rm crit}$ ならば，$f(\theta)$ が無限大に近づく角 $\theta \approx 70.5°$ に達する前に，鉛筆は‘前向き’に滑る．($35° < \theta < 51°$ の範囲では，鉛筆が滑り始めることはできないことに注意．) 鉛筆の‘後ろ向き’と‘前向き’の運動を，図 S61.3 に示す．どちらの場合にも，滑っている先端がまた止まることがある．

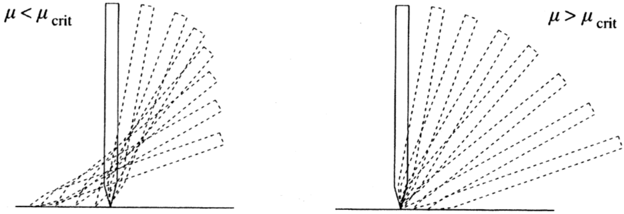


図 61.3

最後に，鉛筆の先端（point）は机から離れないことを示そう．最初に‘前向き’に滑る場合を考える（図 S61.4 参照）．仕事とエネルギーの定理および（ベクトルの）三角形に対する余弦定理により

$$\frac{1}{2}(1-\cos\theta) = W_{\rm fr} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{12}\omega^2 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 + v_{\rm point}^2 + 2v_{\rm point}\times\frac{1}{2}\omega\cos\theta\right]$$

が成り立つ．

摩擦の仕事および鉛筆の先端の速度 $v_{\rm point}$ を含む二つの項はすべて正なので，この三つの項を落とすと，角速度についての不等式 $\omega^2 < 3(1-\cos\theta)$ が得られる．CM に関するトルクは，CM のまわりの回転の運動方程式

$$\frac{1}{2}N(\sin\theta + \mu\cos\theta) = \frac{1}{12}\alpha$$

を与える．一方，運動方程式の鉛直成分は

$$1 - N = \frac{1}{2}\alpha\sin\theta + \frac{1}{2}\omega^2\cos\theta$$

である．(この方程式は滑らない場合と同じであることに注意．その理由は，鉛筆の先端は水平加速度しかもたないので，CM の鉛直方向加速度は変わらないからである．図 S61.5 参照．)

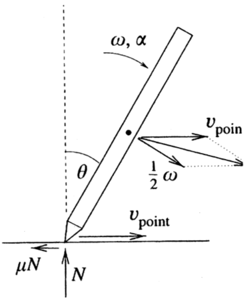


図 S61.4

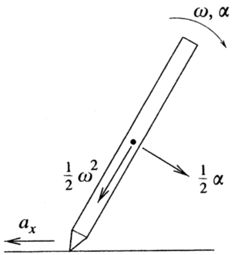


図 S61.5

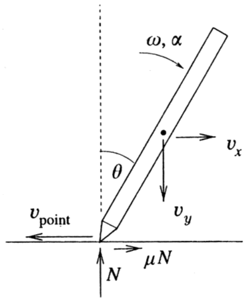


図 S61.6

上の 2 式から，垂直抗力を θ と ω^2 の関数として表すことができる．それと上で求めた ω^2 に対する不等式から

$$N = \frac{1-(1/2)\omega^2\cos\theta}{1+3\sin\theta\,(\sin\theta+\mu\cos\theta)} > \frac{(3/2)[\cos\theta-(1/2)]^2+(5/8)}{1+3\sin\theta\,(\sin\theta+\mu\cos\theta)} > 0$$

が得られる．こうして垂直抗力は常に正であり，鉛筆の先端が机から離れることはない．

‘後ろ向き’ に滑る場合も，解析法はほとんど同じである．図 S61.6 は，CM の速度の水平成分 v_x と鉛直成分 v_y を示す．鉛筆の先端の鉛直方向の速度はゼロなので，v_y と ω の間には $v_y - \frac{1}{2}\omega\sin\theta = 0$ という関係がある．ふたたび仕事とエネルギーの定理を用いて

$$\frac{1}{2}(1-\cos\theta) = W_{\mathrm{fr}} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}\omega^2 + v_x^2 + v_y^2\right)$$

を得る．ここでも，摩擦に対する仕事と v_x を含む正の項を落とすと，不等式

$$\omega^2 < \frac{1-\cos\theta}{(1/12)+(1/4)\sin^2\theta}$$

を得る．ふたたび，CM に関する全トルクと運動方程式の鉛直成分を考慮すると，垂直抗力に対する不等式

$$N = \frac{1-(1/2)\omega^2\cos\theta}{1+3\sin\theta(\sin\theta-\mu\cos\theta)} > \frac{1+3(\cos\theta-1)^2}{1+3\sin\theta(\sin\theta-\mu\cos\theta)(1+3\sin^2\theta)}$$

がでる．分子は常に正で，分母は $\mu < \frac{4}{3}$ ならば（$0 \le \theta \le 90°$ に対して）正である．ところが‘後ろ向き’に滑るのは $\mu < 0.37$ のときだから，ここでもやはり，鉛筆の先端は机から離れない．

もし鉛筆の先端がある段階で滑るのを止めても，このとき $\omega^2 < 3(1 - \cos\theta)$ であり，よって $N > (3\cos\theta - 1)^2/4 \ge 0$ となるので，やはり鉛筆の先端は机から離れない（この解答の最初の部分を参照）．

S62　半径 R の石鹸の泡の中の圧力は，大気圧 p_0 より $\Delta p = 4\gamma/R$ だけ高い．4 という因子は，曲率の二つの向き，および薄膜には両面があることの考慮に基づく．明らかに半径が小さいほど圧力が高く，したがって空気は大きい方の泡に流れ込み，それを膨らませて最終的には半径 R_3 の一つの泡ができる．

泡の体積は R^3 に比例するので，理想気体の方程式と質量の保存から

$$\left(p_0 + 4\frac{\gamma}{R_1}\right)R_1^3 + \left(p_0 + 4\frac{\gamma}{R_2}\right)R_2^3 = \left(p_0 + 4\frac{\gamma}{R_3}\right)R_3^3$$

が要求される．普通の大きさの泡では，曲率による圧力は外部の大気圧より何桁も小さい．曲率による圧力を無視すると，できる泡の半径は

$$R_3 \approx \sqrt[3]{R_1^3 + R_2^3}$$

である．表面張力を決めるため半径を‘正確に’測定する場合に適した式は，

$$\gamma = \frac{p_0}{4}\frac{R_3^3 - R_1^3 - R_2^3}{R_1^2 + R_2^2 - R_3^2}$$

である．しかし現実には，この方法は適用できない．というのは上で示したように，分子はほとんどゼロに等しく，測定誤差の結果として大きな割合の不確かさをともなうからである．測定したデータは，表面張力の大まかな見積もりしか与えないだろう．

S63　水の円板の断面の端は，半径 $r = \frac{1}{2}d$ の半円である（図 S63 参照）．すなわち水の表面の曲率は $2/d$ で，これに対応する曲率の圧力は，表面張力を γ とすれば $\Delta p = 2\gamma/d$ である．（曲率のもう一方の成分は $D \gg d$ のため無視できる．）

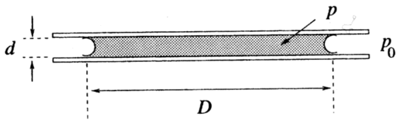


図 S63

それゆえ，大気圧が p_0 のとき，円板内の圧力は $p_0 - 2\gamma/d$ である．この圧力差は，水と各ガラス面の間の面積 $\pi D^2/4$ の面にわたって働く．これは，2 枚のガラス板が，力

$$F = \frac{\pi D^2}{4}\,\frac{2\gamma}{d}$$

で‘引き合う’ことを意味する．

注　d が D よりずっと小さければ，この力はかなりの大きさになり得る．実際，2 枚の平行ガラス板の間に水があるとき，板の面と直交する方向に引っ張ってガラス板を引き離すのは，(不可能ではないとしても) 非常に困難である．引き離すには，面と平行な方向にガラス板をずらさねばならない．

S64　壁から距離 x m の点での糸の速度は，明らかに (x に比例して) 糸の端の速度より小さい．すなわち xv_0 である．

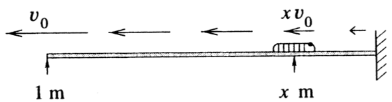


図 S64

この値が毛虫 (caterpillar) の速さより大きければ，毛虫は壁から離れていく．状況は時間とともに絶望的になり，毛虫は決して壁にたどり着けない．

一方，$v_{\text{caterpillar}} > xv_0$ であれば，毛虫の合成速度は壁に向き，速さは時間とともに増すので，その結果，毛虫は確かに壁に到着する．その境は $x = v_{\text{caterpillar}}/v_0 = 0.1\,\text{m}$ の場合である．ここから出発すると，毛虫はどちらの方向にも進まない．

S65　糸の各点に，壁からの距離と糸の全長の比を表示した，標識をつけると想像してみよう．標識の数字は，前問の解答で述べた座標 x にほかならない．$x=0$ は壁の位置にあたり，$x=1$ はくもの位置にあたる．しかし今の場合は，糸が伸びるにつれて，これらの標識（の間隔）も‘伸びる’．

くもが時間 t だけ動いたとする．このとき，毛虫が点 x から近くの点 $x-\Delta x$ まで進むのにかかる時間 Δt を，まず計算する．問題の2点の距離は $(1+v_0t)\Delta x$ であり，毛虫は速さ c で動くとすると，関係式

$$\Delta x = \frac{c\Delta t}{1+v_0t}$$

が成り立つ．毛虫が x_0 から動き始めて時間 T で壁に着くときの運動全体について，上の関係式を加える (積分する) と

$$x_0 = \sum \frac{c\Delta t}{1+v_0t} \approx \int_0^T \frac{c}{1+v_0t}\,\mathrm{d}t = \frac{c}{v_0}\ln(1+v_0T)$$

が得られる．上の積分は，T を適切に選べば任意の大きさになるので，くもがいかに速く糸の端をたぐっても（すなわち，任意に大きな v_0，任意に小さな c，任意の x_0 に対して)，毛虫は有限の時間で壁に着くことになる．これは多分意外な結果であろう．

S66　1)　球が1m自由落下し，それから，画板の底辺近くに隙間なく並べた釘の列で，実際上，水平に跳ね返りながら，点Bに到着するとしよう．鉛直落下にかかる時間は $t_1=0.45\,\mathrm{s}$ で，最終の速さは $v_1=4.4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ になっているので，残りの2mは $t_2=0.45\,\mathrm{s}$ の時間で行く．球が直線ABを（加速度 $g/\sqrt{3}$ で）滑り降りる場合は $t_3=1.01\,\mathrm{s}$ の時間がかかるので，はじめの問に対する答えは，AからBへ球が最短時間で達する方法は，最短距離の道を行くのではない，ということである．

注　複雑な数学（変分法）で，到達時間を最小にする曲線はサイクロイドであることが示せる．

2)　点Aでの静止状態から落ちる物体の鉛直方向速度は，自由落下のとき最大になる．それゆえ跳ね返りながら進む球は，自由落下する物体より先に，す

なわち $t_1 = 0.45\,\mathrm{s}$ より短い時間で，画板の底辺に到達することはできない．答えは‘不可能’である．

S67　この問題で当惑するのは，テキストには，十分なデータが与えられていないことである．しかし図 P67 を情報源に用いることができる．分度器を使えば十分な精度で，ロープの固定端の接線は，鉛直方向と 30° の角をなすことが測れる (図 S67 参照)．このことから，ロープの固定端での張力が $T = 20\,\mathrm{N}/\sin 30^\circ = 40\,\mathrm{N}$ であることがわかる．同様に，ロープの重さはそこでの張力の鉛直成分に等しいので，$mg = T\cos 30^\circ = 34.6\,\mathrm{N}$ から，ロープの質量が $m = 3.5\,\mathrm{kg}$ と得られる．

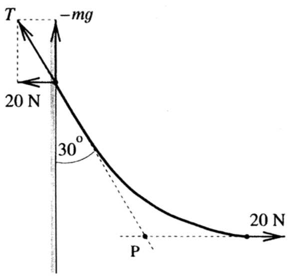


図 S67

注　図 S67 からさらに情報が得られる．ロープの重心は点 P の鉛直上方にあるはずである．その理由は，三つの外力の作用線は 1 点で交わらねばならないからである．

S68　ヒントに述べたことを使うと，ピボットの位置を最高にするには，吊るしたときに下側の脚が水平になるように，コンパスを開かねばならないことが証明できる（図 S68.1 参照）．

実際，下側の脚が水平になっている状態で，まず上側の脚は固定して，下側の脚を上または下に曲げると，コンパスの重心の水平位置は必ずピボット側に移動する．ここで上側の脚を放せば，ピボットは下方に動く．そうしないと，重心が糸のとりつけ点の真下に戻らないからである．こうして，下側の脚を上下

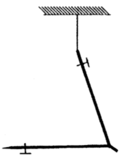


図 S68.1

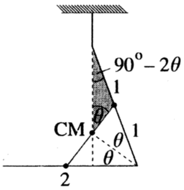


図 S68.2

どちらに曲げてもピボットの鉛直位置は下がるので，最初の状態が求めるものだと結論できる．

本物のコンパスのかわりに，簡単な模型として，細い 2 本の同じ棒を，質量の無視できるピボットでつないだものを考えることにしよう（図 S68.2 参照）．

コンパスの脚の開きの角度を 2θ とし，脚の長さを 2 単位とする．図 S68.2 で合同な角度を見出して，影のついた三角形に正弦定理を適用するのは容易である．図 S68.3 はこの三角形を拡大したものである．

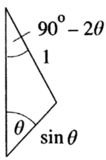


図 S68.3

正弦定理によって

$$\frac{\sin\theta}{1} = \frac{\sin(90^\circ - 2\theta)}{\sin\theta}$$

であるから，単純な計算によって

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

となり，したがって，$\theta \approx 35.3^\circ$，すなわちコンパスは $2\theta \approx 70.5^\circ$ だけ開かねばならない．

注　この $2\theta = 2\sin^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \cos^{-1}(\frac{1}{3})$ という結果は非常に単純なので，もっと

すっきりした解がありそうである．実際，中点連結定理を使って角度 2θ を求めることができる．

図 S68.4 にある 2 本の垂直線のうち，1 本はコンパス全体の重心 C を，もう 1 本は上側の脚だけの重心 E を通るように引いてある．角度 2θ をなす 2 本の直線を考えると，OE と EB が等しいので，$\mathrm{FG} = \mathrm{GO}$ が成り立つ．角度 ϕ についても同様に考えると，$\mathrm{DC} = \mathrm{CE}$ だから $\mathrm{FG} = \mathrm{DF}$ となる．したがって，点 F と G は OD の長さを 3 等分していて，また一方 OD は OE に等しいので，結局 $\mathrm{OE} = 3\mathrm{GO}$ であることがわかる．三角形 EGO は直角三角形なので，$2\theta = 2\cos^{-1}(\frac{1}{3}) \approx 70.5°$ となる．

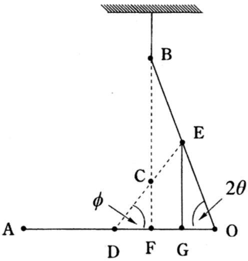


図 S68.4

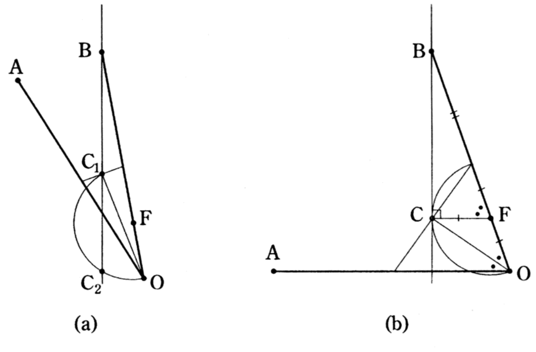


図 S68.5

訳注 もっと簡単な説明もできる．図 S68.5 (a) のように，上側の脚の下半分に，仮想的な半円をつける．ピボットの位置 O を与えたとき，コンパス全体の重心として可能な位置は，糸の支点を通る鉛直線とこの半円の交点（図の C_1 または C_2）である．ピボットの位置が最高になるのは，半円が鉛直線に接するときである（図 S68.5 (b) 参照）．図の BFC は直角三角形で，$\angle BFC = 2\theta$ なので，$\cos 2\theta = 1/3$ がでる．

S69 三角形の重心 S が，糸の支点の真下にあることは明らかである．重心から三角形の頂点へ向かうベクトルを $\mathbf{r}_1$，$\mathbf{r}_2$，$\mathbf{r}_3$，支点へ向かうベクトルを $\mathbf{m}$ とする（図 S69 参照）．糸が板を引っ張る力 $\mathbf{F}_1$，$\mathbf{F}_2$，$\mathbf{F}_3$ は，糸の方向を定めるベクトルによって次のように表せる．

$$\mathbf{F}_i = \lambda_i(\mathbf{m} - \mathbf{r}_i) \qquad i = 1, 2, 3$$

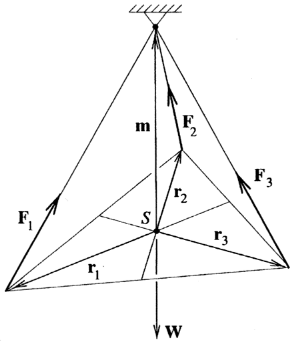


図 S69

板はつり合っているから，働く力のベクトル和はゼロである．

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{W} = 0$$

三角形の重心（位置ベクトルの原点）へ向かうベクトルは，各頂点へ向かうベクトルの算術平均であるため

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 = 0$$

が成り立つ．$\mathbf{W}$ と $\mathbf{m}$ は平行だから，$\mathbf{W} = -k\mathbf{m}$ と書けることに注意する．以上の式から $\mathbf{r}_3$ を消去すると

$$(\lambda_3 - \lambda_1)\mathbf{r}_1 + (\lambda_3 - \lambda_2)\mathbf{r}_2 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - k)\mathbf{m} = 0$$

が得られる．$\mathbf{r}_1$，$\mathbf{r}_2$，$\mathbf{m}$ は同一平面上にないので，それらの 1 次結合がゼロとなるのは，その係数がいずれもゼロとなるときだけである．

したがって，$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ となり，糸の張力は糸の長さに比例することがわかる．上の推論は，どれかの糸がたるんでいれば成り立たない．なぜなら，そのときには板の面は鉛直になって $\mathbf{m}$ もその面内にあるはずだからである．

S70　はじめは，タンク車とその中に入っている液体は静止している．液体を取り出す管は後部にあるので，その栓をあけると液体の質量中心は後ろ向きに動くだろう．系全体の質量中心は動かないので，タンク車自体は前向きに動かねばならない．しかし，管は鉛直なので，出てくる液体は前向きの水平方向運動量成分を獲得することになろう．これは運動量保存則に反してはいない．タンク車内の液体は（地面に対して）後ろ向きに動いているからである．だが，タンク車の前向きの運動は，しばらくすると後ろ向きに変わらねばならない．そうでないと，系全体の質量中心が，最終的には前向きに動き始めることになるからである．運動の向きが変わる力学的な理由は，それまで後ろ向きに動いていた液体は，管から流れ出る直前にタンク車に対し静止するが，その際タンク車の後部に力を及ぼすためである．

注　1)　タンク車が空になるまでに，何度か運動の向きが変わるかもしれないが，多くのパラメーターが含まれるので，その細かな点を解析するのは事実上不可能である．

2)　最後に，この問題のヒントで述べた寸劇に解を与えておく．学生は客車の最後尾に達してそこで止まったが，検札係の車掌はまだ客車に対して後ろ向きに v の速さで走っている場面を考えよう．運動量保存則に従い，客車は前方に $u = mv/(M+2m)$ の速さで動いているはずである．したがって学生は，飛び降りるときに，前向きの運動量 $mu = m^2v/(M+2m)$ を持ち去る．車掌が止まると，（車掌が乗っている）客車は運動の向きを変え，全運動量 $-mu$ をもって後方に動く．したがって，最終的な客

車の速度は

$$V = -\frac{m^2}{(M+2m)(M+m)}\,v$$

となる．

S71 右方向の運動を正にとると，ビーズの質量中心系での初速度は (図 S71.1 参照)

$$v_m = \frac{M}{m+M}\,v_0 \qquad \text{および} \qquad v_M = -\frac{m}{m+M}\,v_0$$

である．この系では質量中心は静止しているので，二つの速度の比は，運動の間，一定値 M/m に保たれる．

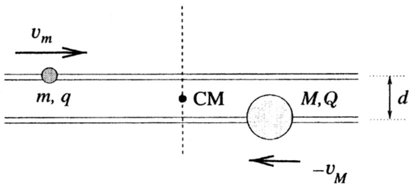


図 S71.1

ビーズがたがいに近づくと，速さは q と Q が同符号なら減少し，反対符号なら増加する．後者の場合，ビーズがふたたび十分に離れると，エネルギー保存則により，ビーズの速さははじめの値に戻る．元の座標系では，質量 m のビーズはしばらくの間加速された後，元の速さ v_0 になるまで減速する．それに対して質量 M の方は（左へ）ある距離だけ移動して，最後に静止する．

ビーズが反発しあうときには，もう少し詳細な議論が必要である．最初のエネルギーが十分あれば，ビーズはたがいにすれちがって，離れるに従い（質量中心系，実験室系のどちらでみても）元の速さに戻る．これに対して，もし最初の運動エネルギーが小さくて距離 d までは近づけないならば，ビーズは元の方向に引き返す．質量中心系では，質量 m のビーズはそのあと左へ速さ $-v_m$ で運動し，一方質量 M のビーズは速さ $-v_M$ で右へ運動する（図 S71.2 参照)．

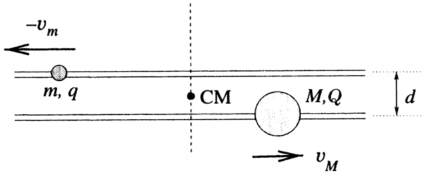


図 S71.2

こうなるための条件は

$$\frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}Mv_M^2 < \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{d}$$

すなわち

$$\frac{1}{2}\frac{mM}{m+M}v_0^2 < \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{d}$$

である．上式に現れる量 $mM/(m+M)$ は，この系の換算質量と呼ばれる．実験室系でのビーズの速度は，二つの座標系の間の相対速度 $|v_M|$ に，質量中心系での速度を加えて求められる：

$$v_m^* = \frac{m-M}{m+M}v_0 \qquad \text{および} \qquad v_M^* = \frac{2M}{m+M}v_0$$

極限の場合として，最初にもっていた運動エネルギーが，二つのビーズが距離 d まで近づくのにちょうど十分なときを考えると，ビーズの相対速度はゼロになる（図 S71.3 参照）．これを実験室系でみれば，二つのビーズは共通の速さ $v_m^* = v_M = mv_0/(m+M)$ で動き続ける．ただし，この最後の状況は理論上のもので，実際には不安定である．というのは，二つのビーズの相対距離がわずかに乱れただけで，ビーズ間の斥力のために相対距離は時間とともに増大するからである．

注　上で議論した三つの場合は，1 次元の力学の衝突のモデルになっている．二つの物体がいっしょに動き続ける極限の場合は，非弾性衝突のモデルである．非弾性衝突では，力学的運動量だけが一定に保たれ，力学的エネルギーは減少する．二つの物体が近づいてからふたたび離れる場合の速度は，弾性衝突の法則（運動量とエネルギーの保存）から計算したものと一致する．二つの物体がすれちがう（本質的には衝突せず，元の速度を保つ）場合の運動は，明らかに保存則と一致する．力学的衝突では二

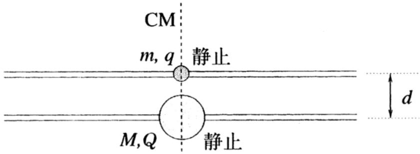


図 S71.3

つの物体がすり抜けることはできないので，この場合に対応する解はふつうは使われない．

S72　1)　v_0 を漸近的に達する共通の速さ，d をはじめのビーズ間の間隔，m を 1 個のビーズの質量とする．

ある時間間隔 Δt の間に，ビーズのかたまりはさらに $v_0\Delta t/d$ 個のビーズに衝突して，質量が $\Delta m = mv_0\Delta t/d$ だけ増え，したがって運動量は $\Delta p = v_0\Delta m = mv_0^2\Delta t/d$ だけ増える．ニュートンの運動法則

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{mv_0^2}{d}$$

から，$v_0 = \sqrt{Fd/m}$ がでる．これが非弾性衝突の場合の，最終的な速さである．

2)　質量が等しい二つの物体の弾性衝突で，どちらかが最初に静止しているときには，速度が入れ替わる．はじめ動いていた物体は静止し，第二の物体は，第一の物体がはじめもっていた速度で動き出す．

一番左のビーズは一様に加速され，最初の（弾性）衝突が起きるまでに

$$v_1 = \sqrt{\frac{2Fd}{m}} = \sqrt{2}v_0$$

の速さに達する．そして第二のビーズにその速さを受け渡して自分自身は静止し，その後，外力によってふたたび加速される．動き出した第二のビーズはどうなるだろうか．第二のビーズは一定の速度 v_1 で動き，第三のビーズに衝突して静止する．第三のビーズおよびその先のビーズも同様にふるまうので，‘衝撃波’ の波面は速さ v_1 で進む．

一方，一番左のビーズはふたたび v_1 の速さまで加速され，静止している第二のビーズに衝突する．この過程がくり返されるので，新たな ‘衝撃波’ が出発

する．加速されるビーズの速さはゼロから v_1 まで一様に変化し，平均の速さは $v_1/2 = v_0/\sqrt{2} = \sqrt{Fd/(2m)}$ である．

注　不完全弾性衝突の場合も興味深い．この場合，コンピューターシミュレーションの結果からいえることは，たがいに衝突するビーズは，時間の差はあれ，やがて一つのかたまりに凝縮し，最終的な速さ $v_0 = \sqrt{Fd/m}$ で，完全非弾性衝突の物体と同じようにふるまう，ということである．凝縮するのに必要な時間は，非弾性の度合い（跳ね返り係数）によって決まる．ビーズ間の衝突がより弾性的になるほど，凝縮に必要な時間が長くなる．

S73　自由落下している最中のビールの重さは，秤にはかからない．しかし，ビールがジョッキで止まるときに失われる運動量や，ビールが流れ出す方向が変わるときに蛇口が受ける力は，秤に示されるので，こうした効果は考慮しなくてはならない．しかし，テーブルとジョッキとビールからなる系を考えると，これらのことはすべて系内の作用と反作用である．外力は，（空気抵抗を無視すれば）重力と秤からの鉛直上向きの反作用の二つだけである．この二つの力が働く結果が，系全体の重心の落下になっていなければならない．重心の落下は，はじめは（ビールがジョッキに届き始めるまでは）加速され，それから一定の速度になり，最後に（ビールがなくなったときに）減速される．その結果，秤の読みを元の読みと比べると，はじめは減少していき，それから変化しなくなり，ついで増加していき，ふたたび変化しなくなるであろう．

S74　入射する水流の断面積を A，速さを v，水の密度を ρ とすると，単位時間に樋に流れ込む水の質量は ρAv である．この量の水の運動エネルギーは $\rho Av^3/2$ で，水平方向の運動量は $\rho Av^2 \sin\alpha$ である．粘性を無視すれば，これらの量は変わることができないので

$$\frac{1}{2}\rho Av^3 = \frac{1}{2}\rho A_1 v_1^3 + \frac{1}{2}\rho A_2 v_2^3 \tag{1}$$

$$\rho Av^2 \sin\alpha = \rho A_1 v_1^2 - \rho A_2 v_2^2 \tag{2}$$

が成り立つ．ここで A_1 と A_2 は樋を右と左へ流れていく水の断面積，v_1 と v_2 はそれぞれの速さである．また物質量の保存も成り立っていなければならない

ので

$$\rho A v = \rho A_1 v_1 + \rho A_2 v_2 \tag{3}$$

も得られる.

式 (1), (2), (3) だけでは, 四つの未知数（二つの断面積と二つの速さ）を決定するのにはまだ足りないので, もう一つの関係式をみつけなければならない. ベルヌーイの法則によれば, 非粘性液体の流線に沿って $\rho v^2/2 + p + \rho g h$ という量は一定である. 最初に水流があたる点から離れた所では, 液体中の圧力は一定で大気圧に等しい. 流れの高さの差, あるいはもっと正確にいえば, その差によるエネルギーの変化が無視できれば（これは速い流れの液体については正しい）, ベルヌーイの法則の帰結は $v = v_1 = v_2$ である. つまり, 樋を流れる水流の速さは左右で同じということになる. これはかなり意外な結論であるが, 上に述べた近似の精度の範囲では正しい.

したがって, 質量と運動量保存の式は $A = A_1 + A_2$ と $A \sin\alpha = A_1 - A_2$ という形になり, それらから

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$$

が得られる. この比は実験で調べることができ, 計算で得られた値と驚くほどよく一致する. これはここで使った近似が妥当なものであることを示している.

S75 時間 Δt の間に, 水面ははじめの加速度 a で $\Delta h = a(\Delta t)^2/2$ だけ下がり, これに対応して質量 $\Delta m = (D^2\pi/4)(\Delta h)\rho$ だけの液体が流れ出す. これは液体全体としての位置エネルギーが $(\Delta m)gh$ だけ減少したことと等価である（図 S75 参照）. 一方, 液体全体は速さ $\Delta v = a\Delta t$ に加速され, その運動エネルギーは $(D^2\pi/4)h\rho(\Delta v)^2/2$ だけ増加する. 流れ出てくる液体の速さはこれよりも大きいが, これにかかわる水の量は全体に比べれば小さいので, その効果は無視することができる.

エネルギーの保存則によれば, 位置エネルギーと運動エネルギーの変化は等しい：

$$\frac{\pi D^2}{4}\frac{a}{2}(\Delta t)^2 \rho g h = \frac{\pi D^2 h \rho}{4}\frac{(a\Delta t)^2}{2}$$

これから $a = g$ がでる.

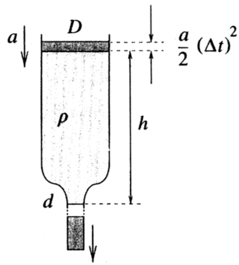


図 S75

これは，はじめ水が自由落下を始めたことを意味する．質量の保存則から，流れ出る水の速さは水面の低下の速さの $(D/d)^2$ 倍だけ大きい．したがって，その加速度も g より同じ係数倍だけ大きくなる．たとえば，開口部の直径が管の直径の 1/10 なら，最初流れ出す水の加速度は $100\,g$ になる！

液体が事実上‘自由落下’すると考えてよいのは，どれくらいの時間だろうか．トリチェリの流出の法則によれば，流出速度は $\sqrt{2gh}$ だから，水面の低下速度は $(d/D)^2\sqrt{2gh}$ である．流出が始まってから，水面の低下速度と流出の速度が（ほぼ）一定の値になるまでの時間 τ は，関係式

$$g\tau \approx \frac{d^2}{D^2}\sqrt{2gh}$$

を使って，大まかに見積もることができる．

たとえば $h = 20\,\mathrm{cm}$ で直径比が 1:10 であれば，$\tau \approx 0.002\,\mathrm{s}$ となる．これはほとんどの目的では無視できる大きさである．

S76　砂はくびれの孔をほぼ一様に流れるから，砂が落ちる時間 T は砂の体積 H^3 に比例する．（ここの目的は大まかな見積もりだけなので，円錐と立方体の体積の差は無視する．）時間 T は重力加速度 g，孔の直径 d，砂の密度 ρ にもよるだろう．すなわち $T \approx H^3 \times f(g, d, \rho)$ である．

T は時間で，g だけが時間の次元を含むので，関数 f は g の平方根の逆数に比例しなければならない．同様な推論により，T は ρ には依存できず，$d^{-5/2}$ に比例することが示せる．まとめると，$T \approx H^3/\sqrt{d^5 g}$ である．比例係数は無

次元の数で，どの量にも依存しないので，1の桁の数と仮定できる．（ただし物理の分野によっては，このような仮定が危険であることが知られている！）

実際のデータを考えてみよう．たとえば，もし H が数cmで d がおよそ1mmとすれば，T は数分となる．これはだいたい卵が茹で上がる時間である．（訳注　砂時計を英語では egg-timer という．）

注　原理的には，平均的な砂粒の直径も，上の公式に取り入れることができよう．しかし，その大きさは，一般にそのほかの量の大きさに比べてずっと小さいので，（砂の原子の大きさを無視するのと同様に）次元による推論では重要ではない．あらゆる次元解析でもっとも慎重を要するところは，扱っている現象で問題となるパラメーターの選択である．

S77　おもりの変位を x として，おもりに働く合力 $F(x)$ を計算しよう（図 S77.1 参照）．

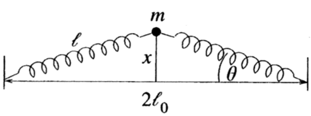


図 S77.1

伸びたばねの長さは

$$\ell = \sqrt{\ell_0^2 + x^2} \approx \ell_0 + \frac{x^2}{2\ell}$$

だから，その張力は

$$F_{\text{spring}} = k\frac{x^2}{2\ell_0}$$

で，おもりに働く合力は（図 S77.2 参照）

$$F = -2F_{\text{spring}}\sin\theta \approx -2F_{\text{spring}}\frac{x}{\ell_0} = -\frac{k}{\ell_0^2}x^3$$

となる．したがって運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{\ell_0^2}x^3$$

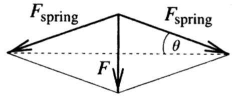


図 S77.2

である．この微分方程式は初等的な方法では解けない．

しかし，与えられた問題の解には，この方程式を実際に解く必要はなく，次元解析を使うだけでよい．方程式を

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m\ell_0^2}x^3 = -Cx^3$$

の形に書く．運動の周期 T は C と振動の振幅 A だけで決まるものと仮定できる．この依存性は

$$T \propto C^\alpha \times A^\beta$$

と書くことができて，次元の関係は次のようになる．

$$\mathrm{s} = [T] = [C]^\alpha \times [A]^\beta = \left(\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2} \times \frac{1}{\mathrm{kg}} \times \frac{1}{\mathrm{m}^2}\right)^\alpha \times \mathrm{m}^\beta = \mathrm{s}^{-2\alpha} \times \mathrm{m}^{-2\alpha+\beta}$$

この方程式が満たされるのは，$-2\alpha = 1$ かつ $-2\alpha + \beta = 0$ のときである．したがって，$\alpha = -\frac{1}{2}$，$\beta = -1$ となり，$T \propto 1/A$ ということになる．このことから，振幅が 2 倍 (2 cm) になれば周期は半分 (1 s) となる．

次元解析では，どの変数を含めるかに多少とも任意性があるようにみえ，得られた結論の正しさに疑問を持たれることもある．そこで，今の問題の別の解法を与えておこう．

おもりの速度を位置の関数として求めるには，エネルギー保存則が使える．おもりが最大変位の位置で静止しているときに，二つのばねに蓄えられているエネルギーは，一般の変位でばねに蓄えられているエネルギーと，そのときのおもりの運動エネルギーの和に等しい．各ばねの伸びは

$$\Delta\ell = \frac{1}{2}\frac{x^2}{\ell_0}$$

だから，保存則の等式は

$$\frac{kA^4}{4\ell_0^2} = 0 + 2 \times \frac{1}{2}k\left(\frac{A^2}{2\ell_0}\right)^2 = 2E_{\rm spring}^{\rm max} = \frac{1}{2}mv^2 + 2 \times \frac{1}{2}k\left(\frac{x^2}{2\ell_0}\right)^2$$

と書ける．ただし A はおもりの最大変位 (振幅) である．この式から，おもりの速度は

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v = \frac{1}{\ell_0}\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{A^4 - x^4}$$

と表せる．変数を分離した後

$$\ell_0\sqrt{\frac{2m}{k}}\int_0^A \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{A^4 - x^4}} = \int_0^{T/4} \mathrm{d}t = \frac{T}{4}$$

を得る．新しい変数 $y = x/A$ を使えば，最終的な結果は

$$T = \ell_0\sqrt{\frac{32m}{k}}\frac{1}{A}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1 - y^4}}$$

となる．この式は周期が振幅に逆比例することを直接示していて，振幅を倍の 2 cm にすれば周期が半分の 1 s になるという結論がふたたび導かれたことになる．

注 周期に対する最終の表式の中の定積分は，プログラム電卓さえあれば計算でき，

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1 - y^4}} \approx 1.31$$

である．これで問題に対する完全な解答が得られた．

S78 ばねが弱いので，物体ははじめのうちは実質上自由落下する．しかし，ばねの長さはすぐに自然長の数倍になる．それに続く運動では，ばねの自然長は無視できる．この近似の下では，物体は鉛直方向と水平方向のどちらにも調和振動をする．初速ゼロで放されるので，水平方向運動の 1/4 周期の後，物体は支点の真下の位置に来る．その間に，鉛直方向運動も 1/4 周期が完了し，物体は mg/k だけ低い（これは L に比べてずっと大きい）つり合いの位置まで下がっている．

物体の運動は定量的に記述できる．図 S78 に示す座標系では，点 (x, y) にある物体の運動方程式は次のようになる：

$$ma_x = -k\left(\sqrt{x^2 + y^2} - L\right)\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

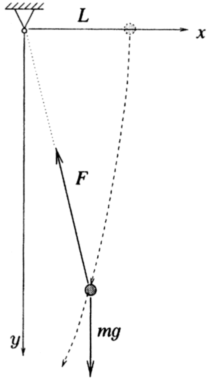


図 S78

$$ma_y = -k\left(\sqrt{x^2+y^2}-L\right)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + mg$$

最初，ばねの伸びが L に比べてそれほど大きくならない間は，ばねによる力は無視できる．これに対して

$$\sqrt{x^2+y^2} \gg L$$

になれば，ばねの元の長さは無視でき，運動方程式は

$$ma_x = -kx \qquad \text{および} \qquad ma_y = -ky + mg$$

という簡単な形になる．この二つの方程式は同じ周期の調和振動を表し，その中心は，x 方向には原点，y 方向にはつり合いの位置 $y_0 = mg/k$ である．初期条件を満たす解は

$$x(t) = L\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right), \qquad y(t) = \frac{mg}{k}\sin\left[1-\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right]$$

と書ける．物体が支点の真下にくるのは $x(t)=0$，$y(t)=y_0=mg/k$ のときで，先に述べた結論と一致する．

注　運動の初期の $t \ll \sqrt{m/k}$ のときには（そのときには上で仮定した運動方程式は厳密には正しくない），上の x と y の表式は，$x \approx L$，$y \approx gt^2/2$ と近似できるので，自由落下の公式と一致する．これは，はじめのうちの運動として妥当な結果である．

S79　貨車が減速度 a でブレーキをかけると，貨車の座標系では物体に，大きさ ma の仮想的な慣性力が貨車の運動方向に働くようにみえる．

この慣性力がいつまでも働き続けるのであれば，振り子は鉛直にはなれない．なぜなら，もし鉛直になったとすると，慣性力がした仕事の総量は（力を受ける点の最終的な変位が力の作用線と垂直だから）ゼロであり，重力による仕事は負だから，振り子の運動エネルギーは負になるが，そのようなことはあり得ない．

実際には，貨車は止まるまでの間だけブレーキをかける．振り子の糸が水平になったときに貨車が止まるなら，慣性力による仕事は $W = maR$ である．ここで R は糸の長さである．その後，振り子が速度 v で鉛直の位置に達するなら，エネルギーの保存により

$$maR - 2mgR = \frac{mv^2}{2}$$

が成り立つ．糸が最高点でもたるまないためには，$mv^2/R > mg$ でなければならず，上の v に対する条件と合わせると，貨車の減速度は $a > 2.5g$ ということになる．したがって結論は，減速度が十分大きく，かつ v_0 が大きいために，貨車が止まるまでに振り子が水平になる時間があれば，振り子はたるまずに鉛直になれる，ということである．

S80　三角柱に働く力は，その重さ mg と，斜面に垂直な力 K である．後者の大きさは時間変化することもあるだろう．三角柱の加速度 $\boldsymbol{a}$ は斜面に沿う方向の成分だけをもつが，その大きさは（慣性系でみるとき）$g \sin \alpha$ である．三角柱に固定した加速度座標系でもニュートンの運動方程式を成り立たせるには，実際に物体の運動の原因になる力に，慣性力 $-m'\boldsymbol{a}$ を付け加えさえすればよい．ここで，m' は，問題にしている物体の質量（たとえば少量の水の質量）である．

質量 m' に働いている重力と慣性力は，斜面に沿う方向の成分は打ち消しあ

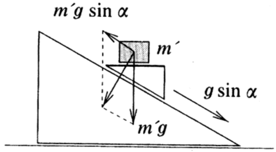


図 S80

うので，その合力は斜面に垂直でなければならない．三角柱に乗っている物体（コップとそれに入っている水）は，あたかも斜面に対して垂直な方向を向く重力場の中にあるように‘感じる’ことになり，その結果，水の表面は斜面に平行になる．

この結論は斜面がどのように運動しているかにはよらない．固定されていても，自由に動いていても，あるいはまた少しの力によって前後に揺さぶられていてもよい．斜面と三角柱の間の摩擦が無視できて，三角柱が斜面を登りきらない限りは，水面の形は斜面に平行な面以外にはなり得ない．

$m \gg M$ の場合については，さらに述べる価値がある．この場合には，三角柱は斜面を‘押しやり’，ほぼ自由に落下する．三角柱に乗っている（水も含めた）物体の重さはほとんど‘なくなる’．しかしこの場合にも，水をコップの内側に保っているわずかな力だけで，水の表面を斜面に平行にするには十分である．

注　水の表面が斜面に平行になるためには，長い時間が経過しなければならないし，したがってまた長い斜面上でないといけない．このため，普通の条件の下では，この興味ある現象を実験で見ることはできない．

S81　紐の断面積と質量分布は一様で，両端は自由であるとする．紐は，地球に対する相対的な位置を変えずに地球をまわる．紐が鉛直なら，明らかに，この現象は赤道でのみ起き得る．

地球とともに回転する座標系では，赤道上で距離 r の軌道を角速度 ω でまわる質量 m の物体は，$-GMm/r^2$ の重力と $mr\omega^2$ の遠心力を受ける．ここで M は地球の質量，G は重力定数である．紐の平衡条件は，（どちらも r によって変わる）重力の合力と遠心力の合力が等しいことである．この平衡条件は，積分

で導くことも難しくはないが，高尚な数学を用いなくとも，次のようにして見出すことができる．

紐が何らかの外力によって少しだけ引きずり下ろされるとしよう．はじめ紐は（回転座標系で）平衡状態にあったのだから，どんなに小さな力でも，平衡の位置から紐を変位させることができる．この変化の際にされる仕事の総量は，1 次の近似ではゼロでなければならない．紐全体を変位させることは，される仕事だけから見れば，質量 Δm の小さな部分を，紐の一番上から一番下まで，ゆっくり移すことと等価である．仕事は二つの項からなる．一つは重力の位置エネルギーの変化で，もう一つは（遠心力は r について 1 次で変化するので）平均の遠心力がする仕事である．長さ L の紐の下端が地面にちょうど触れているとすれば，求める仕事は

$$W = GM\Delta m\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{L+R}\right) - \Delta m\frac{R+(R+L)}{2}\,\omega^2 L = 0$$

である．ここで R は地球の半径である．これは L についての 2 次方程式であり，これを解いて，既知の数値を用いれば

$$L = \frac{R}{2}\left(-3 + \sqrt{1 + \frac{8GM}{R^3\omega^2}}\right) \approx 140,000\,\mathrm{km}$$

となる．これは通信衛星の地球中心からの距離 $r_s = (GM/\omega^2)^{1/3} \approx 42,000\,\mathrm{km}$ の数倍にあたる！

紐の最大張力 $\sigma_{\max}$ はどれだけだろうか．簡単にわかるように，張力が最大となるのは $r = r_s$ のところで，$\sigma_{\max}/\rho = 4.8 \times 10^7\,\mathrm{N\cdot m\cdot kg^{-1}}$ を満たす．ここで ρ は紐の質量密度である．引っ張りの強さと密度の比に対するこの数値は，既知の物質に対する値よりもはるかに大きい（鋼鉄では 2.6×10^6，炭素では 1.7×10^6 ）．したがって，‘空にひっかけた紐’ は原理的にはニュートンの法則と矛盾しないが，現在のところは，それをつくるのに適した材料は（少なくとも一様な断面積の紐では）見あたらない．

S82　1)　橋の最高点では，車の運動方程式は

$$mg - N = m\,\frac{v^2}{\rho}$$

となる．ここで，N は橋から車に対して法線方向に働く力（その符号を変えたものが求める答え），$v = 20\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$，$\rho$ はこの位置での橋の曲率半径である．この問題で一番難しいのは，この曲率半径を求める所である．

投げた物体の到達距離（$d = 100\,\mathrm{m}$）と高さ（$h = 5\,\mathrm{m}$）は，初期条件によって

$$d = \frac{2v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} \qquad \text{および} \qquad h = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

と表せる．商 h/d から $\tan\alpha = 4h/d$ が決まり（それゆえ $\alpha \approx 11.3°$），初速度の水平方向成分は

$$v_x = v_0 \cos\alpha = d\sqrt{\frac{g}{8h}} = 50\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

となる．これから最高点での曲率半径が $\rho = v_x^2/g = 250\,\mathrm{m}$ と計算できる．

それゆえ，最高点での法線方向の力は

$$N = m\left(g - \frac{v^2}{\rho}\right) = 8.40\,\mathrm{kN}$$

である．

2)　車が橋のほかの場所にいるときに働く力も，曲率半径を使って同様に計算できる．橋の 3/4 だけ過ぎた所での曲率半径はおよそ 254 m で，法線方向の力は約 8.37 kN である．橋の中央部から離れると，接線方向の力，つまり摩擦力も働くようになる．この位置ではその値は 995 N で，橋からの力は合わせて 8.43 kN となる．

訳注　曲線 $y = f(x)$ 上の任意の点における曲率半径 ρ は，公式

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\mathrm{d}^2 y/\mathrm{d}x^2}{(1 + (\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^2)^{3/2}}$$

で機械的に計算できるが，そのような‘腕力’を物理的考察で置き換えるのが，本書の目的の一つである．

S83　楕円の二つの軸の端点での曲率半径は b^2/a と a^2/b であることが証明できる．ここで $2a$ と $2b$ はそれぞれ長軸と短軸の長さである．この幾何学的な結果は微分を使って導けるが，物理の問題の考察から導くことも可能である．そのような方法はいくつかあり，以下で説明するのはその一例である．

太陽のまわりの楕円軌道をめぐる惑星を考えよう．楕円の長軸上の端点で太陽からの距離が r の所では，ニュートンの運動の第二法則から

$$G\frac{M}{r^2}=\frac{v^2}{R}$$

が成り立つ．ここで R は端点での曲率半径，M は太陽の質量である．ケプラーの第三法則によれば，軌道の周期は $2\pi\sqrt{a^3/GM}$ である．動径ベクトルは一定の速さで面積を掃く．楕円の面積は πab なので，惑星が長軸の端点にあるときの面積速度に対する二つの表し方を等しいと置くと

$$\frac{vr}{2}=\frac{ab}{2}\sqrt{\frac{GM}{a^3}}$$

を得る．上の二つの式を比べると $R=b^2/a$ がわかる．これを導くのに，楕円の焦点が長軸上にあることを使ったので，同じ証明は短軸については使えない．しかし，曲率半径についていえば，二つの軸は対称である．

問題に与えられた一定の速さで動く質点は，運動方程式 $F=mv^2/R$ に従う．ここで R はその場所でのトラックの曲率半径である．与えられた数値を使うと $b^2/a=1.25\,\mathrm{m}$，$a^2/b=10\,\mathrm{m}$ だから，$2a=10\,\mathrm{m}$，$2b=5\,\mathrm{m}$ である．

注 楕円の曲率半径は周知の調和振動の公式からも計算できる．長径と短径が a と b の楕円上を

$$x=a\cos\omega t \qquad \text{および} \qquad y=b\sin\omega t$$

に従って動く質点を考える．$t=0$ では，質点は長軸の端点を速度 $v=b\omega$，加速度 $A=a\omega^2$ で動いている．一方，加速度は $A=v^2/R$ だから，曲率半径は $R=b^2/a$ である．同様に短軸の端点での曲率半径は a^2/b であることがわかる．

S84 運河の幅を d とし，出発点 A から下流側の距離 d の所に，岸に垂直な直線をひく（図 S84 参照）．

はじめボートは，対岸の目印 F と，この直線の双方から，距離 d の所にいる．水の速さとボートの水に対する速さはともに v だから，F の方向にボートが進んだとき，それと同じ距離だけボートは下流に流される．

このことから，ボートは常に，点 F と直線から同じだけ離れていることになる．したがってボートの軌跡は，F を焦点とし，この直線を準線とする放物線

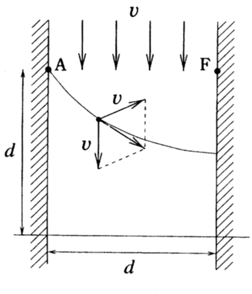


図 S84

になる．非常に長い時間の後，ボートは対岸の，F から距離 $d/2$ の点に近づく．流れとボートの速さが同じであるため，これより近い所には着岸できない．

S85　わずかに押されただけで，子供が一定の速さで（まっすぐ）坂を滑り降りるのであれば，重力の斜面に平行な成分 F は，滑るのを止めようとする摩擦力の大きさ S と同じでなければならない，つまり $F = S$ である．

動摩擦力は，その瞬間の速度と常に反対向きなので，速さを減少させる．一方力 F は，速度の斜面に沿う成分を増加させる．この二つの効果が同時に存在するので，一般には（経路が曲がり，加速度が変化する）かなり複雑な運動となる．しかし最終の速さは，運動の詳細がわからなくても決定することができる．

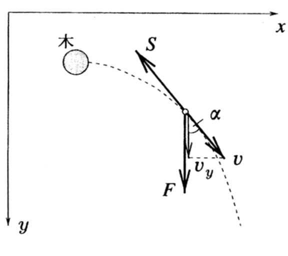


図 S85

図 S85 に示すのは，まっすぐ滑り落ちるのではない，一般の場合を記述するための座標系である．滑っている子供の瞬間的な速度の大きさを v，速度の y 方向成分を v_y とする．まず，短い時間 Δt の間の，この二つの量の変化を計算する．ニュートンの第二法則により

$$m\Delta v = (-S + F\cos\alpha)\Delta t \qquad \text{および} \qquad m\Delta v_y = (F - S\cos\alpha)\Delta t$$

この 2 式を加え，$F = S$ を用いると

$$\Delta v + \Delta v_y = \Delta(v + v_y) = 0$$

すなわち

$$v + v_y = \text{定数}$$

が得られる．初期条件から，この定数の値は $v_0 = 1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ である．滑る子供の最終速度 $v_{\max}$ は，斜面を下る方向を向き，その大きさは，上の‘保存則’に $v = v_y = v_{\max}$ を代入すれば

$$v_{\max} = \frac{v_0}{2} = 0.5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

と決まる．

S86　沿岸警備艇の速さを kv とする．つまり k が求める両船の速さの比である．

一般の時刻 t で，船の間の距離 d（最初は a）は時間 Δt の間に

$$\Delta d = kv\,\Delta t - v\sin\alpha\,\Delta t \tag{1}$$

だけ減る（図 S86 参照）．ここで α は，その瞬間の警備艇の速度が岸となす角度である．一方，警備艇の岸からの距離は

$$\Delta y = kv\sin\alpha\,\Delta t \tag{2}$$

だけ増える．

ここで式 (1) と (2) に含まれる微小変位の和をとるが，その際，三つの和 $\sum \Delta d$，$\sum \Delta y$ および $\sum v\Delta t$ はいずれも a に等しくなければならないことに注意する．

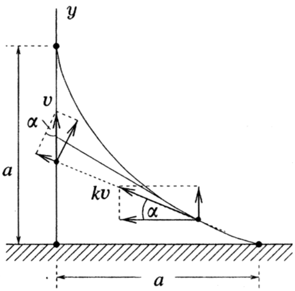


図 S86

面倒を引き起こしそうな角度 α は，和をとる前に消去できて，k に対する驚くほど簡単な 2 次方程式

$$k^2 - k - 1 = 0$$

が得られる．その正の解は

$$k = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

である．この数は，フィボナッチ級数に関連する有名な‘黄金比’である．ここでは k は，問題で述べたような出会い方をする警備艇と密輸船の，速さの比である．

S87　物体の配置と初期条件の対称性から，すべての物体は，n 角形の中心に向かって，同一の（一定ではない）加速度で落下すると考えられる．物体の並び方ははじめの形を保つが，中心からの距離 r は，一定でない加速度で減少する．物体が中心から距離 r にあるとき，一つの（たとえば n 番目の）物体に働く力の合力は

$$F(r) = G\frac{m^2}{r^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{4\sin(\pi k/n)}$$

である．これは，ほかのすべての物体による重力（もっと正確にいうとその中

心に向かう成分）を合成したものであり，中心に固定された，質量

$$M_n = \frac{m}{4}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sin(\pi k/n)}$$

の一つの物体から受ける重力と同じである．質量 M_n の値は，数値計算によれば（m を単位として）

$$M_2 = 0.25, \quad M_3 = 0.58, \quad M_4 = 0.96, \quad \cdots, \quad M_{10} = 3.86, \quad \cdots$$

である．

最初の距離 R から中心につぶれるまでの時間 T は，半長径 $R/2$ のつぶれた楕円軌道をまわるときの周期 T_e の半分の時間と考えることができる．半径 R の円軌道をまわるときの周期 T_c は，円運動の運動方程式

$$G\frac{Mm}{R^2} = mR\left(\frac{2\pi}{T_c}\right)^2$$

から直接計算できて

$$T_\mathrm{c} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

で与えられる．ところが，ケプラーの第三法則によれば

$$\left(\frac{T_\mathrm{e}}{T_\mathrm{c}}\right)^2 = \left(\frac{R/2}{R}\right)^3$$

だから，結局 $T = \pi\sqrt{R^3/8GM_n}$ が求める時間である．

注　極限 $n \gg 1$ の場合は興味深い．系全体の質量を一定値 M_0 に固定しても，つまり $m = M_0/n$ としても，M_n は物体の個数 n とともに増加する．一定量の物質の円周上の分布が細かくなるほど，自分自身の重力によって一点につぶれるまでの時間は短くなる．しかし，任意の細さの線の上に，質量が連続的に分布する場合を調べるのは無意味である．横方向つまり半径方向への物質の拡がりを無視することはできない．

S88　ケプラーの第一法則によれば，宇宙船の軌道は，惑星の中心を一つの焦点とする楕円軌道である．打ち上げ地点と帰還地点が楕円の短軸の両端にあれば，出発速度と帰還速度とはたがいに平行（向きは反対）になる．ところが

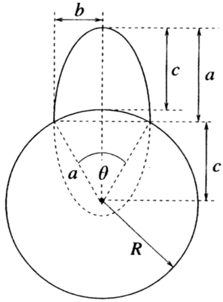


図 S88.1

楕円では，その焦点から短軸の端までの距離は半長径（長軸の長さの半分）a に等しい．したがって $a = R$ がわかる (図 S88.1 参照).

ケプラーの第三法則により，離心率は異なるが長軸の長さが等しい二つの軌道をまわる衛星は，同じ周期をもつ．したがってこの問題では，軌道をひとまわりする周期は，与えられた時間 T_0 になるはずである．しかし，宇宙船は楕円の半分だけしか飛行しない．このために必要な時間は，周期の半分ではなく，宇宙船と焦点を結ぶ動径ベクトルの掃引面積の割合に比例する（ケプラーの第二法則）．楕円の全面積は

$$A_0 = \pi ab = \pi a^2 \sin\frac{\theta}{2}$$

で，半分の軌道に対する掃引面積は

$$A_1 = \frac{\pi ab}{2} + \frac{1}{2} \times 2bc = \frac{1}{2}a^2\pi\sin\frac{\theta}{2} + a^2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

である．したがって飛行時間は

$$T_1 = \frac{A_1}{A_0}T_0 = T_0\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

で，惑星表面からの最大距離は

$$2a - a - (a - c) = c = R\cos\frac{\theta}{2} \le R$$

である．

もし打ち上げと帰還の地点が近づいてもよいとすると ($\theta \to 0$)，計算した飛行時間は最大値

$$T_0\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\right)$$

に近づき，最大高度は惑星の半径に近づく ($c \to R$)．しかし，実は出発地点と帰還地点が同じであれば ($\theta = 0$)，宇宙船は任意の高度まで達することができる．このことから，周期と最大高度とは $\theta = 0$ において θ の連続関数ではないことがわかる．

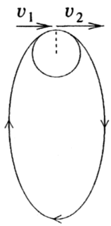


図 S88.2

もし打ち上げ時の速さが十分に大きく（第一宇宙速度 $v = \sqrt{Rg}$ に等しいかまたはそれ以上)，初速度が惑星の表面に平行であれば，図 S88.2 に示した軌道が可能になる．帰還の速度はやはり打ち上げ速度と平行であるが，今度は向きは同じである．最高高度はどんな値にでもなり得るが，周期は T_0 以上でなければならない．これは $\theta = 0$ という特別な場合の軌道である．

S89　1)　$\mu_0/4\pi$ を κ と記すと，D によって C に生じる偶力は反時計回りの向きに $\kappa\mu^2/L^3$ であり，C によって D に生じる偶力はやはり反時計回りの向きに $2\kappa\mu^2/L^3$ である．

2)　磁場が及ぼす作用は偶力だけではない．双極子を一様でない磁場の中に置けば，双極子には力も働く．C が D から受ける力はゼロではない．これは $B_\perp$ の大きさが，C の一方の極の位置では，他方の極の位置よりも少しだけ小さいためである．力の大きさは $\mu \times \partial B_\perp/\partial r$ である．ここで微分は $r = L$ での値

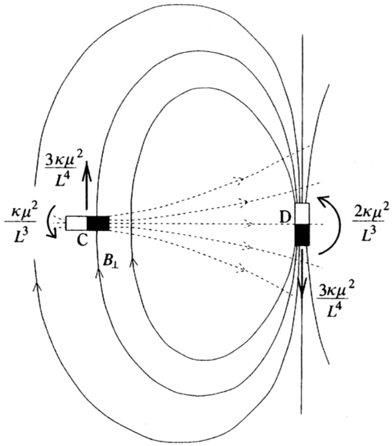


図 S89

で，力の大きさは $3\kappa\mu^2/L^4$ となる．向きは $B_\perp$ と同じである．この力と，D に働く反作用の力は，棒に，大きさが $3\kappa\mu^2/L^3$ で時計回りの向きの偶力を及ぼす．これは，棒に働く他の二つの偶力をちょうど打ち消すので，系を吊るしても何も起きないことになる．このことは，対称性からも，また自由永久運動が不可能であることからも明らかである．

注　非中心力とその反作用の力の作用線が，平行ではあるが同一ではないという，数少ない例である．

S90　電荷 q によって金属表面に誘導される電荷分布が（面の上の領域に）つくる静電場は，面を鏡とみなしたときの q の鏡像の位置に，電荷 $-q$ を置いてできる電場と同じものとなる．これが鏡像法の原理である．したがって，(非相対論的に動いている）物体に働く引力はクーロンの法則によって次のように計算できる：

$$F(x) = k\frac{q^2}{4x^2}$$

ここで k はクーロン定数で，x は任意の時刻での金属面と物体の間の距離で

ある．（最初は物体は鏡像電荷と $2d$ の距離にある．）力のこの表式は，質量 $M = kq^2/(4Gm)$ の物体が，距離 x の所にある質量 m の物体に及ぼす重力 $F = GMm/x^2$ との類推で扱うことができる．この類推では，ケプラーの第三法則が，惑星の周期 T と楕円軌道の半長径 a との関係

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

を与える．帯電した物体が金属面から距離 d の所で放されるときの軌道は，半長径 $a = d/2$ の楕円がつぶれたものとみなせる．電荷が金属面に衝突するまでの時間 T_h は，つぶれた楕円軌道の周期の半分であるから，対応する量を代入して次のように計算できる：

$$T_h = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{q}\sqrt{\frac{md^3}{2k}}$$

S91　塩水中では正イオンと負イオンが容易に動けるので，塩水は良い導体である．帯電したプラスチック球を水面近くに置くと，それとは反対符号の電荷が水面に誘導され，同符号の電荷は遠ざけられる．その結果生じる電場は，水面の上では面と垂直で，水面の下ではゼロである．

帯電した球はその下にある水を引き寄せるので，表面はこぶの形にもち上がる．こぶに働く電気力とつり合う力は主に重力で，表面張力の効果は無視できる．こぶの形は正確にはわからないが，水面の上昇は小さく，平面の表面からわずかしかずれないことは確かである．これが，いわゆる鏡像電荷の方法が使える理由である．効果が最大になるのは図 S91.1 の点 P なので，そこでの上昇を求めれば十分だろう．

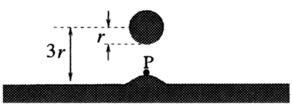


図 S91.1

点 P では，電荷 Q による電場は

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{(3r)^2}$$

である．

表面電荷分布はわかっていないが，その効果は，水面から $3r$ の深さに置いた鏡像電荷 $-Q$ によるもので置き換えることができる（図 S91.2 参照）．鏡像電荷による P での電場は E_1 と大きさも向きも同じだから，合成した電場は

$$E = 2E_1 = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{(3r)^2}$$

である．

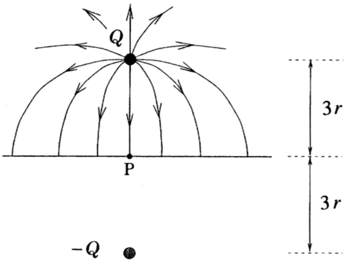


図 S91.2

ガウスの法則によれば，P における面電荷密度は

$$\sigma = \varepsilon_0 E = \frac{1}{2\pi}\frac{Q}{(3r)^2}$$

である．

水面の単位面積あたりに働く力は，電荷密度 σ と球による電場 E_1 の積である：

$$\frac{F}{A} = \sigma E_1$$

これは P において単位面積あたりに上向きに働く力であり，水位が最高 h の高さまでもち上がることに伴って生じる静水圧とつり合う：

$$\frac{F}{A} = \rho g h$$

電場と電荷密度に上で求めた結果を代入すれば，h に対する次の式が得られる：

$$h = \frac{1}{\rho g}\frac{1}{2\pi}\frac{Q}{(3r)^2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{(3r)^2}$$

これに数値を入れれば，$h \approx 0.29\,\mathrm{mm}$ となる．これは球の直径に比べて非常に小さく，水面が平らに近いと仮定して進めた我々の扱い方が正しかったことになる．

S92　球面鏡像電荷の方法が使える．反対符号の二つの電荷を $+Q_1$ および $-Q_2$ とする．この 2 電荷による場では，電位ゼロの点の軌跡は

$$k\frac{Q_1}{r_1} - k\frac{Q_2}{r_2} = 0$$

で与えられる．ここで r_1 と r_2 は，軌跡上の任意の点から二つの電荷までの距離である．これを $Q_1/Q_2 = r_1/r_2$ と表せば明らかなように，距離の比 r_1/r_2 は一定である．アポロニウスの定理によれば，このような性質をもつ点はある球面（アポロニウスの球面）の上にある．したがって，電位ゼロの等電位面は球面である．

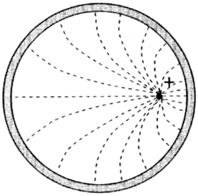


図 S92.1

問題に述べられている金属球殻が接地されているならば，球殻の電位はゼロである．図 S92.1 に示すように，内側にある点電荷 Q は，球殻の内側表面上に一様でない電荷分布を誘導する．元の電荷と誘導された電荷分布が球殻の内側につくる電場は，元の電荷と球殻の外部に仮想的に置いた負の点電荷がつくる電場と同じである．この後者の電荷を球面鏡像電荷という．

球殻の内側の電荷分布は球殻の電位にはよらない．もし球殻が接地していなければ，内側の電荷分布にはよらずに，電荷 $+Q$ が外側表面に一様に分布する．

なぜなら，球殻をつくる物質中では電場はいたるところゼロであり，したがって外側表面の電荷には，内側に電荷があることはわからないからである．球殻の外部の電場からは，電荷は球の中心にあるかのようにみえる．

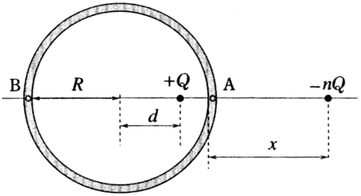


図 S92.2

球殻の内側にある電荷 Q に働く力は，この電荷とそれに対する鏡像電荷との間のクーロン力に等しい．図 S92.2 の記号を使い，電荷 $+Q$ が半径 R の球の中心から距離 d のところにあり，鏡像電荷 $-nQ$ は球殻から距離 x にあるとする．したがって電荷の比は n で，それに対する表式は，二つの電荷を結ぶ線分が球殻と交わる 2 点 A と B を使って簡単に求められる．すなわち

$$n = \frac{x}{R-d} = \frac{x+2d}{R+d}$$

で，これから $n = R/d$ と $x = R(R-d)/d$ が得られる．したがって，金属球殻の内側にある電荷に働く力は

$$F = -k\frac{nQ^2}{(x+R-d)^2} = -kQ^2\frac{Rd}{(R^2-d^2)^2}$$

である．すぐわかるように，この力は $d=0$ ではゼロで，$d \to R$ では無限大になる．負の符号は，力が（仮想的な）鏡像電荷の位置に向けて働くことを表す．

注　金属球殻の内側表面の電荷分布は，ガウスの法則を使って計算できる．内側表面の電荷面密度は電場の強さに比例するが，この電場を求めるには，元の電荷の電場と鏡像電荷の電場を重ね合わせればよい．

S93　ホウ素原子（実際にはホウ素イオン）の質量を M，未知の衝突粒子の質量を m で表す．

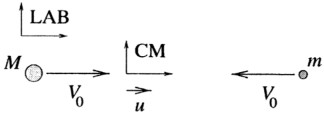


図 S93.1

衝突前は，実験室系（LAB 系）では，これらの粒子は同じ大きさ V_0 で反対向きの速度をもつ．衝突する粒子の質量中心系（CM 系）に移るのは容易である（図 S93.1 参照）．LAB 系での 2 粒子の全運動量は $MV_0 - mV_0$ であるから，重心の速度は

$$u = \frac{M-m}{M+m} V_0$$

である．

CM 系では全運動量は常にゼロであり，二つの粒子は常に反対方向に，同じ大きさの運動量をもって動かねばならない．ところが，エネルギーの保存則からわかるように，各粒子の CM 系での運動量の大きさ，したがって速度の大きさは，衝突の前と後で同じでなければならない．変わり得るのは速度の方向だけである．散乱される前のホウ素原子の CM 系での速さは

$$V = V_0 - u = V_0 - \frac{M-m}{M+m} V_0 = \frac{2m}{M+m} V_0$$

であり，したがって衝突後もこの値をもたねばならない（図 S93.2 参照）．

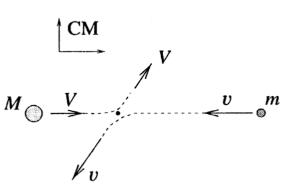


図 S93.2

LAB 系に戻るには，LAB 系と CM 系の相対速度 $\mathbf{u}$ を，CM 系での速度ベクトルに加えればよい．LAB 系では，散乱後のホウ素原子の速度 $\mathbf{u} + \mathbf{V}$ は，図 S93.3 に示した円周上の一点に向かうベクトルである．ホウ素原子の散乱後と

散乱前の速度の間の角度が最大となるのは，$\mathbf{u}+\mathbf{V}$ が半径 V の円に接するとき，つまり $\mathbf{V}$ が $\mathbf{u}+\mathbf{V}$ に垂直になるときである．

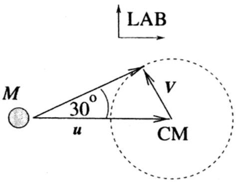


図 S93.3

この場合には

$$|\mathbf{V}| = \sin 30°|\mathbf{u}| \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{2m}{M+m}V_0 = \frac{1}{2}\frac{M-m}{M+m}V_0$$

これから $m = \frac{1}{5}M$ を得る．したがって未知の粒子は質量数 $A = 2$ をもち，種類は明らかになった．粒子は重陽子，すなわち重水素の原子核である．

S94　二つの球の間の摩擦は無視できるので，衝突の間は，表面に垂直な力だけを及ぼしあうことができる．したがって，第一の球は衝突の後止まり，第二の球は第一の球の初速度 v_0 を獲得する．しかし，二つの球の回転は変化しないので，衝突直後には，第一の球はその場所で回転し，第二の球は回転せずに速さ v_0 で滑っていく．

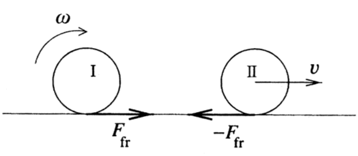


図 S94.1

球とテーブルの間の摩擦（friction）はもちろん重要で，球の運動に影響を及ぼす．図 S94.1 に示すように，第一の球は動摩擦力 $F_{\mathrm{fr}} = \mu mg$ によって前方へ加速されるのに対し，第二の球は同じ大きさの力で減速される．第一の球の回

転は摩擦によって減り，第二の球の回転は増える．摩擦力の働きは，両方の球が滑らずに転がるようになるまで続く．その後は運動は変化しない．

以下で，最終的な運動は，摩擦係数にも，場所による摩擦係数の変化にもよらないことを示そう．衝突直後には，はじめ動いていた方の球は角速度 $\omega = v_0/r$ で回転する．したがって回転軸のまわりの角運動量は $I\omega = \frac{2}{5}mr^2(v_0/r) = \frac{2}{5}mv_0r$ である．テーブルとの接触点 P のまわりの角運動量も同じ値でなければならない．それは，球の重心が静止しているから，すなわち並進運動による角運動量はゼロだからである．摩擦力の作用線は点 P を通るので，それ以後の運動で，P のまわりの角運動量が摩擦によって変わることはない．（重力とテーブルの抗力の和はゼロなので，全体としてはトルクを生じない．）

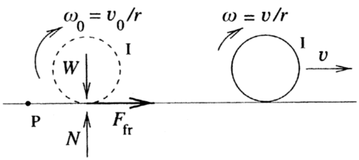


図 S94.2

滑らずに速さ v で転がっている球の角運動量は，それ自身の角運動量 $\frac{2}{5}mvr$ とその重心の運動による角運動量 mvr の和である．図 S94.2 の左側は，はじめ動いていた球の衝突直後の様子で，球に働く力を示してある．右側の図は，球が最終的に滑らずに転がる様子を表す．角運動量の保存則によって，$\frac{2}{5}mv_0r = \frac{2}{5}mvr + mvr$ であるから，$v = \frac{2}{7}v_0$ となる．同様に考えて，もう一つの球の最終速度は，摩擦係数によらず $\frac{5}{7}v_0$ でなければならないことが示せる．

S95　距離 L を動く間に，板は L/d 個のローラーの角速度を $\omega_{\max} = v_{\max}/r$ に上げる．板の位置エネルギーの減少は $MgL\sin\alpha$ で，各ローラーの運動エネルギーは $\frac{1}{2}I\omega_{\max}^2 = \frac{1}{4}mv_{\max}^2$ になる．ここで，ローラーの接触面の最終的な速さは板の最終速度と等しいこと，またローラーの慣性モーメントは $I = \frac{1}{2}mr^2$ であることを用いた．

板の重力位置エネルギーの減少分が，そのままローラーの運動エネルギーに

変わると考えるのは間違いである．もしそうだとすれば

$$MgL\sin\alpha = \frac{L}{d}\frac{1}{4}mv_{\max}^2 \tag{1}$$

から，板の最終速度は

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{4dMg\sin\alpha}{m}}$$

ということになる．しかしこの結果は誤っている．というのは，ローラーの回転速度を上げる過程は動摩擦を含み，その結果熱としての散逸があることを考慮に入れてないからである．

一つのローラーと板の間の動摩擦力を $F(t)$ で表す．（この力は時間的に一定と考える必要はない．）短い時間間隔 Δt の間のローラーの角運動量変化は

$$I\Delta\omega = rF(t)\Delta t \tag{2}$$

である．この微小変化の和をとると，ローラーの最終的な角速度を含む式が得られる：

$$r\sum F(t)\Delta t = I\omega_{\max} = I\frac{v_{\max}}{r} \tag{3}$$

一方，時間間隔 Δt の間に摩擦に逆らってなされる仕事（発生する熱）ΔQ は，動摩擦力と，それが働く面のずれ（相対変位）との積である：

$$\Delta Q = F(t)[v_{\max} - r\omega(t)]\Delta t$$

(2) と (3) とから，全散逸エネルギーは

$$\begin{aligned} Q &= \sum F(t)[v_{\max} - r\omega(t)]\Delta t \\ &= r\omega_{\max}\sum F(t)\Delta t - I\sum \omega\Delta\omega \\ &= I\omega_{\max}^2 - I\frac{\omega_{\max}^2}{2} = I\frac{\omega_{\max}^2}{2} \end{aligned}$$

最後の行で，$\omega\Delta\omega = \frac{1}{2}\Delta(\omega^2)$ となることを使った．この結果によれば，散逸する熱の大きさはローラーが得る運動エネルギーに等しい．注目すべきは，結

果が摩擦力の大きさにも，その時間変化の仕方にもよらないことである．エネルギー収支の正しい式は (1) ではなく

$$MgL\sin\alpha = \frac{L}{d}\frac{1}{4}mv_{\max}^2 + Q = 2\frac{L}{d}\frac{1}{4}mv_{\max}^2$$

であり，これから最終速度は

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2dMg\sin\alpha}{m}}$$

と得られる．

S96 (球の経路と鉛直方向からなる) 2 次元の問題として扱うことにして，テーブル表面上に一点 P を選び，そのまわりの球の角運動量を調べよう．摩擦力の作用線はこの点を通るので，P のまわりの摩擦力によるトルクはない．重力とテーブルの抗力は打ち消しあう．球に他の力は働いていないので，選んだ点のまわりの角運動量は一定である．球ははじめ静止しているので，この角運動量の値はゼロである．

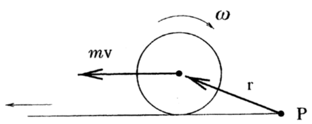


図 S96

テーブルクロスを球の下から引き抜くと，球の滑りと転がりが始まる．図 S96 の記号に従うと，角運動量は二つの項の和に書ける：

$$\mathbf{J} = I\boldsymbol{\omega} + \mathbf{r} \times (m\mathbf{v})$$

ここで I は球の慣性モーメント，m は質量である．この式の第一項は内部スピンで，第二項は重心の並進運動による軌道角運動量である．式に現れたベクトルの向きを考慮すると，角運動量の大きさは $J = I\omega + mvR$ と書ける．ここで R は球の半径である．

簡単にわかるように，球が滑らずに転がるときには，軌道角運動量の符号はそのスピンの符号と同じでなければならない．一方で，この問題では二つの項の和は常にゼロでなければならない．この二つの条件が満たされるのは，物体が静止しているときだけである．読者はこのことを実験で確かめることができよう．

最終状態は，摩擦力の大きさにも，テーブルクロスの引き抜き方にもよらない．（一様な加速度で均等に引き抜くこともできるし，何回か急に動かして引き抜くこともできる．）しかし，空気の抵抗と転がり摩擦が無視できることは重要である．それらがあると，P のまわりの角運動量が変化し得るからである．

S97　地球の自転方向（西から東）を正にとると，法律改正が行われれば，自転軸のまわりの自動車交通の角運動量が増加するだろう．なぜなら，東へ向かう自動車は，地軸からより離れたところを走ることによって，全角運動量への（正の）寄与が増し，逆に西へ向かう自動車は，負の寄与を減らすからである．東向きと西向きの自動車の数は同じだと仮定すれば，この変更があっても系の慣性モーメントは変化しない．系の全角運動量は変化できないので，地球の回転の速さは減少しなければならない．したがって，1 日の長さは増加するはずである．もっともそれに気づくことはまずないだろうが！

注　別の考え方で同じ結論に達することもできる．英国には多数のロータリーがある．これを通り抜けるときの（左回りから右回りへの）向きの変更は，自動車交通の角運動量の変化をもたらし，それが地球の自転に小さな変化をもたらすことになる．交通網全体は，多数のロータリーがつながったものと考えることができる．（訳注　電流回路網はループの集まりとみなせることを想起せよ．）

S98　小さな球の角加速度を α_1，大きな球の角加速度を α_2，両者に共通な水平方向の加速度を a_1，台車の加速度を a_2 とする．球は滑らずに転がるから

$$R\alpha_2 = a_2 - a_1 \qquad \text{および} \qquad R\alpha_2 = r\alpha_1$$

が成り立つ．$R = 2r$ だから

$$\alpha_1 = 2\alpha_2 = \frac{a_2 - a_1}{r}$$

という関係が得られる．

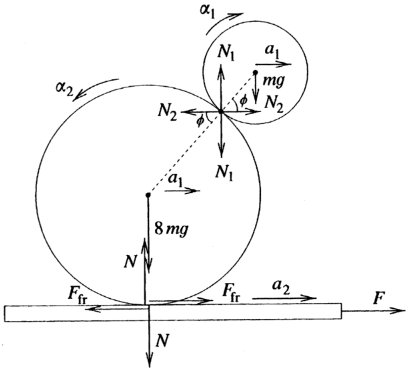


図 S98

小さな球の慣性モーメントは $\frac{2}{5}mr^2$ で，大きな球の慣性モーメントは，密度が等しいため，$\frac{2}{5}\times 8m\times(2r)^2=\frac{64}{5}mr^2$ となる．図 S98 の記号を使うと（$F_{\rm fr}$ は摩擦力），運動方程式は次のように書ける：

$$F-F_{\rm fr}=Ma_2$$

$$8mg+N_1-N=0 \qquad F_{\rm fr}-N_2=8ma_1$$

$$mg-N_1=0 \qquad N_2=ma_1$$

$$N_1 r\cos\phi-N_2 r\sin\phi=\frac{2}{5}mr^2\alpha_1$$

$$2rF_{\rm fr}+2rN_2\sin\phi-2rN_1\cos\phi=\frac{64}{5}mr^2\alpha_2$$

これらの方程式から，力 F を

$$F=\left(9m+\frac{7}{2}M\right)\frac{\cos\phi}{1+\sin\phi}\,g\approx 79\,\mathrm{N}$$

と表すことができる．球の台車に対する相対加速度は

$$\Delta a=a_2-a_1=\frac{5}{2}\frac{\cos\phi}{1+\sin\phi}\,g$$

である．台車から落ちる時刻 t までに，球が台車に対して動く距離は $L/2$ であり，最初の速度はゼロだから

$$t = \sqrt{\frac{L}{\Delta a}} = 0.55\,\mathrm{s}$$

である．

注　この曲芸は，小さな球を水平位置 $\phi = 0$ に保って行うこともできる．このときには，二つの球の間の摩擦力は，小さな球の重さとつり合う．さらに，球の間の摩擦力が十分に大きければ，ϕ を負にすることもできる．

S99　テーブルの面上の任意の点 P から見たボールの運動を考える．ボールに働く力の中で，重力とテーブルの垂直抗力は，大きさは等しく方向は反対であり，摩擦力はテーブルの面内に働くので，ボールに働く合力の P に関するモーメント（トルク）は水平成分を持たない．その結果，ボールの P に関する全角運動量の水平成分は一定に保たれねばならない．

ボールが滑らずに転がっているときには，角運動量の水平成分の向きはボールの速度 $\mathbf{v}$ と垂直で，その大きさは $|\mathbf{v}|$ に比例する．（半径 R の中身のつまったボールの場合には，全角運動量の水平成分は $J = I\omega + mvR = \frac{7}{5}mvR$ である．P96 と S96 も参照せよ．）運動の最後の段階で，ボールがふたたびテーブルの上を滑らずに転がるときの角運動量の水平成分は，はじめの段階のものと同じでなければならない．このことから，ボールの速度 $\mathbf{v}$ の方向と大きさも，はじめと終わりで変わらないことがわかる．

このようにして，ボールは最初もっていたのと同じ速さ，および同じ運動量ベクトルでテーブルから離れることになる．さらに，全運動エネルギーも変化しない．この最後の点は，ボールが円板に乗るときと円板から降りるときに，摩擦力がボールに仕事をして，ボールの運動エネルギーを変えることを考えると，とくにふしぎである．しかし実際には，ボールになされる仕事の代数和はゼロである．これは運動量またはエネルギーの保存則の帰結ではなく，角運動量の保存則の帰結なのである．

注　並進と回転の運動方程式を用いてやや複雑な計算をすると，回転円板の上で，ボールは（テーブルに固定した座標系から見ると）ある円軌道の上を一定の速さで動

くことが示される．(この結果を導くには，動摩擦係数が十分に大きいため，ボールが円板上で滑っている時間が無視できると仮定する．科学博物館で用いられている中身のつまったゴムボールの場合は，この仮定は妥当である．) ただしこの円軌道の中心は円板の中心軸ではなく，角速度は円板の角速度の 2/7 倍である．円板が等速回転をしている場合には，円板を降りた後のボールの軌道ははじめの軌道の延長上にある．しかし，円板の回転速度が一定でない場合や，滑っている時間が無視できない場合には，これは成り立たない．ボールの運動量の大きさは変わらないが，円板に乗り降りする結果，軌道が横にずれるのである．

S100　輪の内部の引っ張り力を T とする．輪の微小部分の両端に働く引っ張り力を合成すると，輪の中心に向かう力 $2T\sin(\Delta\theta/2) \approx T\Delta\theta$ となる (図 S100 参照)．これは遠心力 $R\Delta\theta A\rho R\omega^2$ とつり合っていなければならない (A は輪の断面積)．

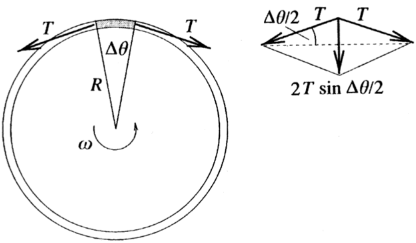


図 S100

これより，輪に沿う方向の応力 T/A は $\rho R^2\omega^2$ ということになる．ひずみ ε はその E^{-1} 倍である．結局，外周の増加量 $2\pi R\varepsilon$ は，$2\pi\rho R^3\omega^2/E$ となる．

S101　糸の一方の端を力 F_0 で引っ張るとき，糸が円柱の上を滑らない範囲で，他方の端を引っ張る力をどこまで大きくできるだろうか．円柱と接している糸の任意の点を表すのに，そこでの円柱の半径と，ある決まった半径との間の角度 α を用いる．(訳注　糸が円柱と接している部分を $0 \le \alpha \le \pi$ とする．) 円柱にかけた糸にたるみがなければ，糸は円柱に法線方向の力を及ぼす．その結果，糸と円柱の相対的な動きを妨げる摩擦力が生じる．α が増すにつれて糸の

張力は増すが，糸の任意の部分の両端における張力の差は，その部分に働く摩擦力で打ち消される．

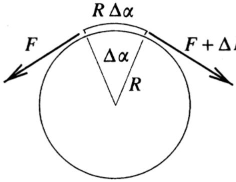


図 S101.1

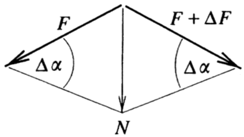


図 S101.2

円柱の中心に対して角 $\Delta\alpha$ を張る，糸の微小部分を考える．図 S101.1 に示すように，微小部分の一方の端の張力を F，他方の端の張力を $F+\Delta F$ とすれば，力の差 ΔF は摩擦力とつり合う：

$$\Delta F = \mu N \tag{1}$$

ここで N は糸が円柱表面に及ぼす法線方向の力，μ は本問で求める摩擦係数である．

法線方向の力は，力 F と，力 $F+\Delta F \approx F$ のベクトル和として，図 S101.2 のように決まる．すなわち

$$N = 2F\sin\frac{\Delta\alpha}{2} \approx F\Delta\alpha \tag{2}$$

これを式（1）に代入すれば，F と角 α の関係が

$$\Delta F(\alpha) = \mu F(\alpha)\,\Delta\alpha$$

と得られる．この関係は，放射性崩壊が従う式

$$\Delta m(t) = -\lambda m(t)\,\Delta t$$

と形式的に同じ形をもつ．ここで $m(t)$ は放射性物質の質量，t は経過した時間，λ は崩壊定数である．周知のように，放射性物質の質量は時間とともに指数関数的に減少する．すなわち

$$m(t) = m_0 e^{-\lambda t}$$

上記の対応を用い，$-\lambda$ を μ で置き換えれば，‘糸の摩擦’ の法則が

$$F_\alpha = F_0 e^{\mu\alpha}$$

と表される．問題の二つの不等式は

$$2F(0) = F(\pi) = F(0)e^{\mu\pi}$$

と等価で，これより $\mu = (1/\pi)\ln 2 \approx 0.22$ を得る．

注　糸に働く力は角 α とともに指数関数的に増加する．糸の両端における力の比は，糸を何回か巻きつけるだけで，非常に大きな値に達し得る．登攀家はこの興味ある事実を，落下防止のためのロープを固定するのに用いる．船乗りも同じ方法を，大きな舟を素手で（！）止めるときに用いる．

S102　ジェニーが考えるのは，半径 R，線密度 ρ の一様な輪で，これが，輪の中心を通る，輪の面と垂直な軸のまわりで，一定角速度 ω で回転しているとする．輪の上の点の向心加速度は $R\omega^2$ だから，輪の微小部分に働く向心力は単位長さあたり $p = \rho R\omega^2$ である．仮に高さ 1 m の円筒容器が圧力 p の気体の中にあるとすると，気体が円筒の壁に及ぼす力は，ちょうど回転を持続させるのに要する力になる（図 S102.1 参照）．

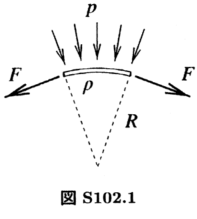


図 S102.1

現実には，輪の一部分を円軌道に保つ力は，仮想的な外部圧力ではなく，輪自身の内部の張力で，その大きさは

$$F = \rho R^2\omega^2$$

である．そのことを示すには P100 を参照してもよく，あるいは，半円形の底面をもつ（たとえば高さ 1 m の）容器が，圧力 p の媒質の中にある場合を調べてもよい（図 S102.2 参照）．面積 $2R$ の長方形に働く力 $2Rp$ が，壁の中で接線方向に働く力 $2F$ とつり合わねばならない．

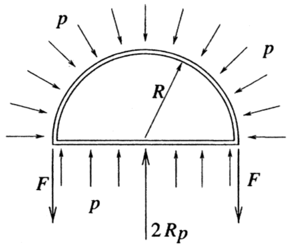


図 S102.2

ジェニーの考えは次のように続く．輪の上の，中心に対して角 2α を張る円弧の部分について，ニュートンの運動の第二法則がどのような形で満たされるかを見よう．この質量 $m = 2R\rho\alpha$ の物体に働く力の合力は $2F\sin\alpha$ である．一方その質量中心の加速度は，輪の中心と円弧の質量中心の距離を s とすれば，$a = s\omega^2$ である（図 S102.3 参照）．

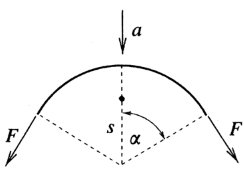


図 S102.3

ニュートンの法則により

$$2F\sin\alpha = ma$$

で，上述の F，m，a の表式を用いれば，$s = (R\sin\alpha)/\alpha$ を得る．チャーリーの元の問題のように半円の場合には，$\alpha = \pi/2$ だから $s = 2R/\pi$ である．

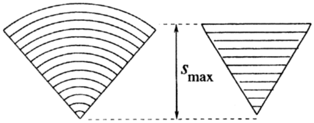


図 S102.4

扇形の質量中心を求める場合には，扇形を幅の狭い円弧に分け，それぞれの円弧を，その質量をもち，円弧の質量中心にある質点で置き換える．同じ手続きは，三角形の質量中心を，幅の狭い帯に分けて求める場合にも行われる．このことから，扇形の質量中心は，高さ $s_{\max} = (R \sin\alpha)/\alpha$ の二等辺三角形の質量中心とちょうど同じ位置，すなわち頂点から距離 $\frac{2}{3}(R\sin\alpha)/\alpha$ の点にあることがわかる（図 S102.4 参照）．以上がジェニーの非凡な論理の説明である．

S103　テーブルの高さと鎖の全長は同じだから，それを L（$= 1\,\mathrm{m}$）と記し，鎖の中で鉛直に動いている部分の長さを x，質量を m で表す．運動方程式は（動く部分の質量が変化することを考慮に入れて）

$$mg = \frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v$$

と書ける．これを

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v$$

と書き換えると，左辺はその瞬間の質量と加速度 a の積である．右辺を $\mathrm{d}m = (m/x)\mathrm{d}x$ と $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = v$ を用いて簡単化すると，

$$a = g - \frac{v^2}{x}$$

を得る．この式は，鎖の加速度が g より小さいことを示す．初速度ゼロ，一定加速度 f の直線運動では $v^2/x = 2f$ が成り立つので，上式右辺の第二項はさらに簡単化される．すなわち今の問題では，鎖の加速度は一定で

$$a = g - 2a$$

を満たし，これより

$$a = \frac{g}{3}$$

を得る．

時間 t_1 の間，鎖がテーブルから落下し，先端が加速度 $g/3$ で距離 L 落ちるとすれば

$$t_1 = \sqrt{\frac{2L}{a}} = \sqrt{\frac{6L}{g}} = 0.78\,\mathrm{s}$$

である．鎖の先端が床に達すると鎖全体が鉛直になり，その速度は

$$v_1 = at_1 = \frac{g}{3}\sqrt{\frac{6L}{g}} = \sqrt{\frac{2Lg}{3}} = 2.56\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

となる．これ以後は，鎖は自由落下をする．最後の輪は，初速 v_1 から g で加速し，時間 t_2 の間に距離 L 進む．すなわち

$$L = v_1 t_2 + \frac{1}{2}gt_2^2$$

この式から

$$t_2 = \sqrt{\frac{2L}{3g}} = \frac{t_1}{3} = 0.26\,\mathrm{s}$$

を得る．それゆえ，鎖の最後の輪が床に達するのは，過程のはじまりから時間

$$t_1 + t_2 = \frac{4}{3}t_1 = 1.04\,\mathrm{s}$$

が経過したときである．

注　1)　エネルギー保存則の適用は誤った結果を導く．たとえば，時刻 t_1 における鎖の重心の高さの減少は $L/2$ なので

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mg\frac{L}{2}$$

とおき，$v_1 = \sqrt{2Lg/3}$ を代入すると，矛盾する結果

$$mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m\left(\sqrt{\frac{2}{3}Lg}\right)^2 = mg\frac{L}{3}$$

に陥る．エネルギーの 1/3 が失われたようにみえるだろうが，これは実際，鎖が静止している次の輪を急に動かすときに生じる，一連の非弾性衝突で失われたエネルギーとして説明できる．

2)　この問題は別の道筋を通って解くこともできる．鎖の全質量を M とする．吊り下がっている部分（質量 $m = (M/L)x$）が，微少質量 $(M/L)\Delta x = (M/L)v\Delta t$ の次の部分を動かす際，静止しているこの微小部分を時間 Δt の間に速度 v まで加速するので，力

$$\frac{[(M/L)v\,\Delta t]v}{\Delta t} = \frac{M}{L}\,v^2$$

を要する．その力の反作用が，吊り下がっている部分を減速するので，

$$ma = mg - \frac{M}{L}\,v^2$$

が成り立つ．この式に $m = (M/L)x$ を代入すれば，前出の解が再現される．

3)　鎖が間隔 $\varepsilon = L/n$ でつながった n 個の輪からなると仮定すると，$n \to \infty$ の極限で正しい答えがでる．

4)　微積分学の方法を用いて，（非線形）微分方程式

$$a = g - \frac{v^2}{x}$$

を，$t = 0$ での初期条件 $v = 0$，$x = x_0$（$x_0 \ll L$）の下で解くことができる．解

$$v(x) = \sqrt{\frac{2}{3}\,gx\left[1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^3\right]}, \qquad t = \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}x}{v(x)}$$

は，極限 $x_0 \to 0$ で，我々の発見法的な解に近づく．

S104　任意の形の閉曲線に沿って，一定の速度で動いている鎖や柔らかいロープは，滑車やシリンダーなどで拘束されていなくても，同じように動き続けることを示そう．

ある空間閉曲線に沿って，速さ v で定常的に動いている鎖を考える（図 S104.1 参照）．鎖を広げている力は，どこでも同じ大きさ F をもたねばならない．その理由は，鎖の微小部分の接線方向の加速度はゼロだからである．単位長さあたりの質量が ρ の鎖の，ある点での曲率半径を R とすれば（R は場所によって変わってもよい），図 S104.2 に示すように，長さ $R\Delta\alpha$ の部分の質量は $\Delta m = \rho R\Delta\alpha$ で，加速度は v^2/R だから，運動方程式は

$$\rho R\Delta\alpha\,\frac{v^2}{R} = F\Delta\alpha$$

である．これから $F = \rho v^2$ という関係がでる．

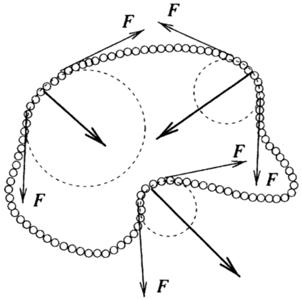


図 S104.1

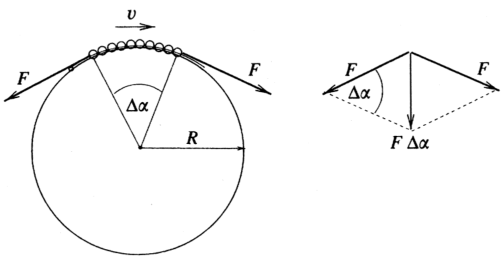


図 S104.2

この式に R は入らないことに注意する．すなわち F は曲率半径にはよらない．接線方向の力 F の合力は，その場所の鎖を曲げるのにちょうど必要な力である．鎖が直線の場合には，その微小部分に働く力の合力はゼロである．鎖の曲がり方が強いほど，各微小部分に働く合力は大きい．合力の方向も，必要な力の方向である．

したがって，フランクが推測したように，鎖ははじめの形と速さを保ちながら落下する．

S105　前問の解答で示したように，単位長さあたりの質量 ρ の柔らかい鎖

やロープが速さ v で動くとき，それが他の物体に接していなければ，内部張力

$$F = \rho v^2$$

が働いている．この結果は，鎖がつくる弧の曲率半径 R にはよらないことに，注意する必要がある．この結果は，鎖やロープが直線の形で動くときにもあてはまる．（このときは R は形式的に無限大ととることができる．）今の場合には，加速度運動によって鎖が滑車から離れるときに，この自由条件が満たされる．

鎖の変位を x，鎖の右側の部分の加速度を a とする．両方の側の運動方程式は

$$F - \rho\left(\frac{L}{2} - x\right) g = \rho\left(\frac{L}{2} - x\right) a$$

$$\rho\left(\frac{L}{2} + x\right) g - F = \rho\left(\frac{L}{2} + x\right) a$$

である．任意の x に対する鎖の速さは，積分を用いなくても，エネルギー保存則から決めることができる．はじめの位置（そこで速さは無視できると仮定）と比べたポテンシャルエネルギーの減少は，鎖の長さ x の部分が x だけ下がったときの減少と同じだから（図 S105 参照），

$$\rho x^2 g = \frac{1}{2}\rho L v^2$$

が成り立つ．

鎖が滑車を離れるときの変位と速さは，上の 4 式から F と a を消去して，

$$x = \frac{1}{2\sqrt{2}} L \approx 0.35\, L \qquad \text{および} \qquad v = \frac{\sqrt{Lg}}{2}$$

と計算できる．このように，鎖が滑車から離れるのは，鎖の長さの 15%がまだ上に上がっているときで，そのときの鎖の速さは，エネルギー保存則に単純に $x = L/2$ を代入して得られる値 $\left(\sqrt{Lg/2} \approx 0.71\sqrt{Lg}\right)$ より小さい．

注　それから後の鎖の運動も興味深い．滑車から離れた後の鎖は，長さの異なる二つの直線部分が半円弧で結ばれた形をとり，左側の上昇する部分は，時間とともに増加する速さで短くなる．それに対応して，右側の部分は下に加速される．滑車の半径が無視できるならば，左側の鉛直部分（その質量は時間とともに減少する）の速さは

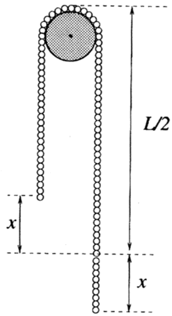


図 S105

原理的には無限に増加する．実際には滑車と鎖の輪の大きさがどちらも有限なので，速さには上限がある．上に動いている部分の速さは増加するが，運動エネルギーは有限である．これは，その部分の質量の減少が，速さの増加を上まわるからである．同じ現象はむちが鳴るときにもみられる．むちの（短くなっていく）部分の速さが増していき，それが音速まで達すると鋭い衝撃波音を生じる．

S106　1)　輪の運動を，輪といっしょに速さ c で動く座標系で調べる．この座標系では，半径 R の円形の輪の各部分は等速回転をする．中心角 $\Delta\alpha$ を張る微小部分の質量は $\rho R\Delta\alpha$，加速度は c^2/R で，この部分に働く張力の合力は $F\Delta\alpha$ である（S105 参照）．ニュートンの運動方程式

$$F\,\Delta\alpha = \rho R\,\Delta\alpha\,\frac{c^2}{R}$$

から，'輪の波' は速さ $c = \sqrt{F/\rho}$ で動くことがわかる．これは同じロープを伝わる微小な横波の速さと同じである．

2)　半径 R の転がる輪の角速度は $\omega = c/R$ で，輪は質量 $m = 2\pi R\rho$ をもつ．輪がもつエネルギーは，並進（translation）と回転（rotation）のエネルギーの和として

$$E = E_{\text{transl}} + E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}(2\pi R\rho)(c^2 + R^2\omega^2)$$

と表される．これは

$$E(\omega) = 2\pi Fc\,\frac{1}{\omega} = K\,\frac{1}{\omega}$$

という形に書くことができる．ここで $K = 2\pi Fc$ は，ロープの性質とその中の張力で決まる定数である．もちろんいくつかの輪が同時に励起されることも可能で，その個数を n とすれば，全エネルギーは

$$E_n = nK\,\frac{1}{\omega} \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

である．輪の運動量 $P_n(\omega)$ と角運動量 $J_n(\omega)$ も同様に計算できる：

$$P_n(\omega) = n\,(2\pi R\rho)\,c = nK\,\frac{1}{c\omega} \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

$$J_n(\omega) = \pm n\,(2\pi R\rho)\,Rc = \pm nK\,\frac{1}{\omega^2} \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

角運動量の式の二つの符号は，輪がロープの‘上’を動くか‘下’を動くか，すなわち二つの可能な‘偏極’に，対応している．

このように，(ある特定の角速度の円運動の励起だけが起こるとすれば) エネルギー，運動量，角運動量は，とびとびの値だけをとり得ることがわかる．これらの値は，整数と，基本的な‘量子’の積の形に書ける (角速度に依存する) これらの‘量子’の間には

$$E(\omega) = cP(\omega) = \omega J(\omega)$$

の関係が成り立つ．すぐわかるように，光子 (photon) に対しても同じ関係がある：

$$E_{\text{photon}} = \hbar\omega, \quad P_{\text{photon}} = \hbar\omega/c, \quad J_{\text{photon}} = \pm\hbar$$

もちろんこの形式的な類推を，(たとえば光子は輪と等価だと考えるなど) あまり深い意味にとってはいけない．しかしこの類似は，古典物理学においても，質点よりも複雑な対象の中には，とびとびのエネルギー，運動量，角運動量の準位にだけ励起される，わかりやすい例があることを示している．

S107 質量 $\Delta m = 50\,\mathrm{kg}$ 分の砂の速さが，時間 $\Delta t = 1\,\mathrm{s}$ の間に $v = 1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ に達する．したがって水平方向の運動量の変化は $\Delta p = \Delta m\, v = 50\,\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$

である．これは力

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{v\Delta m}{\Delta t} = 50\,\mathrm{N}$$

が砂を加速することを意味する．エンジンがする仕事は，砂の加速だけを考慮に入れれば，$50\,\mathrm{J \cdot s^{-1}}$ である．すなわち出力（仕事率）は $50\,\mathrm{W}$ である．

砂はコンベアのベルトに乗るとき鉛直方向の運動量を失う．（砂は自分の重さより大きな力をベルトに及ぼす．）砂はベルトの上で鉛直方向に減速され，次に水平方向に加速される．ベルトの運動エネルギーは増加する．砂の運動エネルギーの増加は，$\Delta t = 1\,\mathrm{s}$ の間に $\Delta m\, v^2/2 = 25\,\mathrm{J}$ である．すなわちエンジンの出力の半分（$25\,\mathrm{W}$）は砂の運動エネルギーに変わる．残りは摩擦に対する仕事であり，熱に変わる．

注　加速の間の砂の平均速度は $v/2$ だから，摩擦力（$F = 50\,\mathrm{N}$）の仕事率は $Fv/2 = 25\,\mathrm{W}$ である．ベルトは力 $-F$ を受け，その仕事率は $-Fv = -50\,\mathrm{W}$ である．すなわちエンジンの出力のちょうど半分が，砂の加速に用いられる．

S108　1)　まずロールの速さを，それが進んだ距離の関数として求める．距離 x 進んだときの，ホースの動いている部分の質量は，$m(x) = M(1 - x/L)$ である．速さ $v(x)$ は，エネルギー保存則

$$\frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v_0}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\left(\frac{v}{r}\right)^2$$

から決まる．ただし，ポテンシャルエネルギーの変化と，ロールの半径が減ることによって生じる鉛直方向の小さな速さは無視してある．距離による質量の変化を用いれば，速度は

$$v\,(x) = \frac{v_0}{\sqrt{1 - x/L}}$$

であることがわかる．x が増すにつれて速度も増す．すなわちロールは，ほどけるにつれて加速する．

全部ほどけるのにかかる時間は，関数 $v(x) = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ の逆数を積分して

$$T = \int_0^T \mathrm{d}t = \int_0^L \frac{\mathrm{d}x}{v(x)} = \frac{1}{v_0}\int_0^L \sqrt{1 - x/L}\,\mathrm{d}x = \frac{L}{v_0}\int_0^1 \sqrt{1-u}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{3}\frac{L}{v_0}$$

と得られる．ホースは加速するので，ほどけるのにかかる時間は，一定速度でほどけるとしたときの時間よりはもちろん短く，実際，その 2/3 である．

2) 質量が減り速さが増していくロールと，長さが増していく静止した水平部分とからなる系は，もちろん質点と考えることはできない！ それゆえ運動の基礎法則は，$F = ma$ という簡単な形で適用することはできず，もっと一般の

$$\sum F_{\text{external}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, p_{\text{total}}$$

という形が用いられねばならない．ここで F_{external} は系に働く外力，p_{total} は系全体の運動量である．

動いているロールの全運動量（これが系全体の運動量でもある）は

$$p(x) = m(x)v(x) = M\,(1 - x/L)\,\frac{v_0}{\sqrt{1 - x/L}} = Mv_0\sqrt{1 - x/L}$$

である．明らかに，x が増すにつれ $p(x)$ は減る．これは，動いている部分の質量の減少が，速度の増加より速いことの反映である．それゆえ，系に働く合力 $K(x)$ の向きは運動の向きとは逆で，

$$K(x) = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}p(x)}{\mathrm{d}x}\,v(x) = -\frac{Mv_0^2}{L}\frac{1}{2(1 - x/L)}$$

である．

S109 質量が一様に分布した薄い球殻による重力場は，球殻内部ではゼロである．外部では，球殻の全質量が中心に集中しているときの重力場と同じである．地球表面から 100 km 地下では，二つの要素が重力場に影響する．まず，そこより‘さらに地下の’部分の質量は，地球の全質量より小さく，それにより重力加速度は減少する．一方，地球中心に近づくので，それは g を増す方に働く．どちらの要素がより強いだろうか．

厚さ 100 km の地殻は，半径 6400 km をもつ地球の全体積の 4.6%に相当する．しかし質量は，地球の全質量の 2.5%にすぎない．重力加速度は，半径 r より内部の質量を M' として，$g = GM'/r^2$ で計算できる．地表から 100 km 地下では，（それより上の地殻を除いた）実効質量は $M' = 0.975\,M$ で，半径は

$r' = (6300/6400)\,r = 0.984\,r$ である．このデータを上の式に代入すれば，地下 100 km の重力加速度は，地表での値より 0.7% 大きい ことがわかる．

より一般的には，地殻の密度が平均密度の 2/3 より小さければ，中心に近づくに従い g は増加することが示せる．

S110　まず試掘坑を考える．その体積は，小惑星全体の体積に比べれば無視できるとする．小惑星の密度を ρ，半径を R とする．半径 r における重力加速度は，それから下の半径 r の球だけが存在するときと同じである：

$$g(r) = G\frac{m(r)}{r^2} = G\frac{(4/3)\,\pi r^3}{r^2} = \frac{4\pi G\rho}{3}\,r$$

すなわち重力加速度は小惑星の中心からの距離に比例し，常に中心を向く．

したがって最初の不運な宇宙人は，振幅 R の調和振動の途中で運命の地に近づいたことになり，そこに達したのは，振動の最初の四半周期が経過したときである．上の式の r の係数は，ω^2 すなわち角振動数の 2 乗にあたる．したがって落下が続いた時間は

$$T_1 = \frac{T}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$$

である．穴の底に衝突したときの速さは，振幅と角振動数の積として

$$v_1 = R\omega = 2\,R\sqrt{\frac{\pi G\rho}{3}}$$

と得られる．

第二の事故までの間に，緑色の宇宙人は，小惑星の物質の 1/8 を掘り終わっていた．惑星の表面から中心に達するこの球形の空洞中の重力場は，重ね合わせの原理の‘巧妙な’応用によって求めることができる．それには空洞を，‘通常の’チタンと‘負の密度の’チタンの混合物がつまったものと考えればよい．その結果空洞中の重力場は，完全な（空洞のない）小惑星の重力場と，‘負のチタン’の球の重力場の和となる．図 S110.1 に，小惑星の中心から空洞中の任意の点 P へのベクトル $\mathbf{r}$，空洞の中心から小惑星の中心へのベクトル $\mathbf{c}$，および空洞の中心から点 P へのベクトル $\mathbf{r}+\mathbf{c}$ を示してある．

一様な小惑星中の重力加速度および空洞中の重力加速度は，それぞれ位置ベクトルに比例し，比例係数は上で $-\omega^2$ と記した定数である．空洞中に物質がな

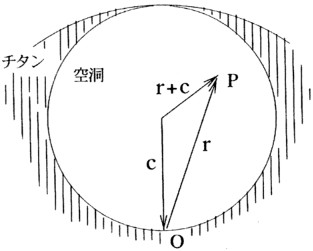


図 S110.1

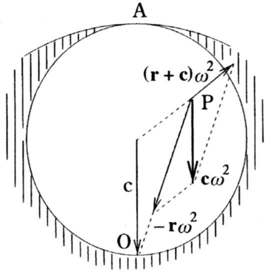


図 S110.2

いことは，負の密度を用いて表現してある．

合計の加速度は（図 S110.2 参照）

$$g = -\omega^2 \mathbf{r} + \omega^2 (\mathbf{r} + \mathbf{c}) = \omega^2 \mathbf{c}$$

である．

この重力加速度は，空洞中の点 P の位置によらない一定のベクトルである．すなわち空洞中には一様な重力場があり，その大きさは $\omega^2 R/2$，すなわち試掘坑の中央の（したがって空洞の中心の）重力加速度である．

注 任意の空洞の中でも重力場は一様であることが，同様にして示せる．その大きさは，空洞の中心の点での，中身のつまった球の内部の重力加速度に等しい．

第二の不運な宇宙人が落下する時間 T_2 および衝突の速さ v_2 は，等加速度運動に対する式を用いて

$$T_2 = \frac{2}{\omega} = \sqrt{\frac{3}{\pi G \rho}} \qquad \text{および} \qquad v_2 = 2R\sqrt{\frac{\pi G \rho}{3}}$$

と計算できる．したがって専門家が報告した比は

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\pi}{4} \qquad \text{および} \qquad \frac{v_1}{v_2} = 1$$

であった．2 番目の不運な宇宙人が落下した時間は，最初の宇宙人の場合よりいくらか長かったが，二人は小惑星の中心に同じ速さでぶつかったのである．

速さが同じであったこと，したがって運動エネルギーも同じであったことは，偶然ではない！　まず最初の場合をみると，小惑星の中心の重力ポテンシャルは表面より低いので，不運な宇宙人は加速され，ポテンシャルの減少に相当する運動エネルギーを得る．第二の場合が第一の場合と異なるのは，'負の密度' の空洞の重力ポテンシャルも考慮に入れねばならない点である．しかしこの宇宙人は空洞の一方の端から他方の端まで落ちるので，空洞についての重力ポテンシャルははじめと終わりで変わらない．重ね合わせの原理を重力ポテンシャルに適用して得られる結論は，ポテンシャルの全変化は両方の場合で同一で，したがって二人の犠牲者が得る速さも同じだということである．

S111　半球を，同じ厚さをもつ，多数の同心の球殻に分けてみる．球の中心における重力をみるために，そこに単位質量の粒子を置くとすれば，球殻はこの粒子にどのような力を及ぼすだろうか．球殻の質量は半径の 2 乗に比例し，質量が与えられた球殻が粒子に及ぼす力は半径の 2 乗に反比例するので，どの球殻が中心につくる加速度もみな等しい（図 S111.1 参照）．

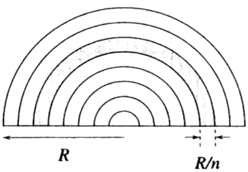


図 S111.1

球殻の個数を n とし，小惑星の半径を R，その密度を ρ とすれば，一番外側の球殻の質量は $2\pi R^2(R/n)\rho$ である．半球による全重力場は，一番外側の球殻による重力場の n 倍だから，質量 $M = 2\pi R^3\,\rho$ をもつ球殻の重力場に等しい．この質量は，半球の実際の質量の 3 倍である．

この質量 M の半球状球殻が粒子に及ぼす力の大きさは，単位質量の粒子が球殻に及ぼす力の大きさに等しい．後者は，球殻の単位面積あたり，$p = G(M/2\pi R^2)(1/R^2) = G\rho/R$ である．この効果を球殻全体について積分するため，圧力 p の液体が，同じ形の半球の表面に及ぼす力と比較する（図 S111.2

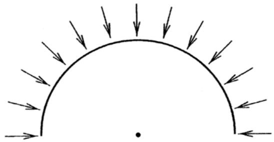


図 S111.2

参照).

液体が半球全体に及ぼす力の合力はゼロだから，半球表面の曲面部分に働く力の合力の大きさは，平面部分に働く力に等しい．したがって $g = p\pi R^2 = G\rho R\pi$ である（図 S111.3 参照).

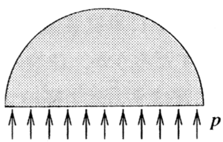


図 S111.3

さて，最初の重力加速度，すなわち小惑星表面の重力加速度は

$$g_0 = G\,\frac{4\pi R^3}{3}\,\rho\,\frac{1}{R^2}$$

である．したがって上で計算した値は $g = \frac{3}{4}\,g_0 = 7.36\,\mathrm{cm\cdot s^{-2}}$ である．チタンの密度の値を用いれば，元の小惑星の半径は $R \approx 78\,\mathrm{km}$ と決まる．

S112　二つの部分を $d = 1\,\mathrm{m}$ まで引き離すのに必要な仕事 W が計算できるならば，引力 F は $W = Fd$ からわかる．だが W はどのように求めればよいだろうか．もちろん力と変位の積という直接の方法は，元の問題に戻るからだめである．他の方法を見つけねばならない．

二つの半球を引き離すと，系の重力ポテンシャルは増加する．W はこの増加と同じ値をもつ．この増加を計算するため，緑色の宇宙人が，半径 R，厚さ d の円板中にあったチタンを，表面に運んだときにした仕事を求める．くりぬいた金属を，摩擦のない装置で表面に運び，小惑星の表面に一様に広げたと考え

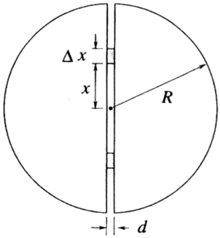


図 S112

ればよい．

質量 M の小惑星の表面での重力加速度を g とすれば，中心から距離 x の点の重力加速度は $g(x) = xg/R$ である．小惑星の密度（すなわちチタンの密度）は $\rho = 3M/(4\pi R^3)$ である．はじめは半径 x と $x + \Delta x$ の間にあった（図 S112 参照）体積 $\Delta V = d2\pi x\Delta x$，質量 $\Delta m = \rho\Delta V$ の金属を考えよう．この金属はみな同じ深さから運び上げられるので，仕事を計算するときにはまとめて考えてよい．この金属に働く力は，元の位置では $\Delta m\, gx/R$，表面では $\Delta m\, g$ である．小惑星の内部から表面に上がる間，重力場は一様に増加するので，最初と最後の力の算術平均が使える．変位は $R - x$ なので，なされた仕事は

$$\Delta W = \Delta m\, g\,\frac{1 + (x/R)}{2}(R - x) = \Delta m\, g\frac{R^2 - x^2}{2R} = \frac{3}{4}\,\frac{Mgd}{R^4}(R^2 - x^2)\, x\Delta x$$

である．問題の仕事の総量は，異なる深さからチタンを運び上げる仕事の和で，具体的に書けば

$$W = \sum \Delta W = \frac{3Mgd}{4R^4}\sum (R^2 - x^2)\, x\,\Delta x$$

である．層を無限に薄くする極限をとれば，上式中の和は積分

$$\sum (R^2 - x^2)\, x\Delta x \Rightarrow \int_0^R (R^2 - x^2)\, x\,\mathrm{d}x = \frac{R^4}{4}$$

となる．それゆえ，なされた仕事の総量は $W = \frac{3}{16}Mgd$ である．

注　同じ結果は，積分を用いなくても得ることができる．x の代わりに新しい変数 $u = x^2/R^2$ を導入し（$0 \le u \le 1$），異なる深さの層についての和を，u の異なる値に

ついての対応する項の和で置き換える．$u = x^2/R^2$ および $u + \Delta u = (x + \Delta x)^2/R^2$ という関係を用い，小さい量 Δx の 2 乗を含む項を無視すると，なされた仕事は

$$W = \frac{3}{8} Mgd \sum (1 - u)\,\Delta u$$

と表される．$1 - u$ は 1 から 0 まで一様に変わるので平均 1/2 で置き換えることができ，一方 Δu の和は 1 だから，上の和は容易に計算でき，仕事に対する前の表式が得られる．

‘神話の巨人’ は，二つの半球を d だけ引き離す間に仕事 $W = \frac{3}{16} Mgd$ をするので，これに要する力は $F = \frac{3}{16} Mg$ である．これは二つの半球間の引力であり，支柱が支えねばならなかった力である．小惑星の半径とチタンの密度がわかっているので，この力は，数値的には

$$F = \frac{3}{16} M \frac{GM}{R^2} = \frac{3}{16} \left(\frac{4\pi R^3 \rho}{3}\right)^2 \frac{G}{R^2} = \frac{GR^4 \rho^2 \pi^2}{3} \approx 4.5 \times 10^{13}\,\mathrm{N}$$

と得られる．この力の大きさの感じをつかむため，単位面積に働く平均の圧力を計算すると，$p = F/(\pi R^2) = 1.4 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$ となる（地球の大気圧の 1.5 倍）．これは地球では，14 トンの物質の重さであるから，十分に強い支柱なら，そのような荷重に耐えることができるはずである．

注　二つの半球間の力を，二重積分の形で直接計算することもできる．右側の半球の対称軸を極座標の軸にとり，この半球の微少体積を $\mathrm{d}V = 2\pi r \sin\theta\, r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r$ と表すと，これに働く力 $\mathrm{d}\mathbf{F}$ は球の中心を向き，大きさは $\mathrm{d}F = \rho \mathrm{d}V G(Mr^3/R^3)/r^2$ である．この $\mathrm{d}\mathbf{F}$ の左向きの成分は $\mathrm{d}F \cos\theta$ で，右半球を左へ引っ張る合力は，これを右半球について積分したもの，すなわち $\mathrm{d}r$ について 0 から R まで，$\mathrm{d}\theta$ について 0 から $\pi/2$ まで積分する二重積分で与えられる．ここで $GM/R^2 = g$ および $\rho = 3M/(4\pi R^3)$ を用いれば，上と同じ解答が得られる．

S113　帯電した球面が一つのものか，二つの部分をいっしょにしたものかには関係なく，表面の電場の強さは

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R^2}$$

で，面の単位面積あたりの電荷は

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

である．この電場は，微少面積 ΔA にある電荷 $\Delta Q=\sigma\Delta A$ に，力 $\Delta F=\frac{1}{2}E\Delta Q$ を及ぼす（図 S113 参照）．1/2 がある理由は，電場の強さは球面の外側では E，内側ではゼロで，平均が $E/2$ だからである．

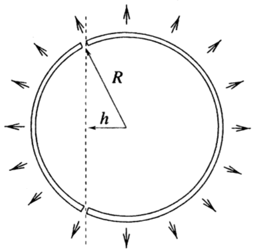


図 S113

したがって，球面上の電荷が及ぼしあう力は，単位面積あたり

$$\frac{\Delta F}{\Delta A}=\frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R^4}=p$$

である．求める力は，球面内にある圧力 p の液体が，球面の二つの部分を押して離そうとする力とみることができる．後者は，圧力 p と，平面と球が交差する断面積の積，$p\pi(R^2-h^2)$ でもあるから，球面の二つの部分は，力

$$F=\frac{Q^2}{32\pi\varepsilon_0 R^4}(R^2-h^2)$$

で押さえつければよいことになる．

S114　図 S114 の記号を用いると，第一の球の平衡条件は

$$\frac{mg}{F}=\frac{\ell}{x}$$

である．ここで

$$F=kqQ/x^2$$

は第一の球に働くクーロン力で，x は電荷 q および Q をもつ二つの球の間の距離である．

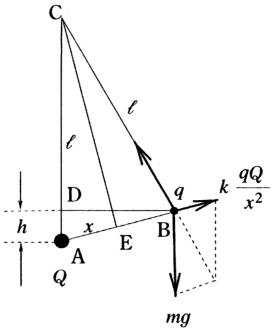


図 S114

明らかに三角形 ABD と CAE は相似で，その結果

$$\frac{x}{2} : \ell = h : x$$

が成り立つ．上の三式から，電荷の間隔と系の静電エネルギー E_{electro} を

$$x = k\,\frac{qQ}{2mgh} \qquad \text{および} \qquad E_{\text{electro}} = k\frac{qQ}{x} = 2mgh$$

と計算できる．なされた仕事は，静電ポテンシャルエネルギーおよび重力ポテンシャルエネルギーの変化の和だから

$$W = 2mgh + mgh = 3mgh$$

である．この仕事が，電荷の大きさと糸の長さのどちらにもよらないのは，意外な結果だと思う読者もいるだろう．

S115　半径 R，壁の厚さ d の球形の容器に，圧力 p の水素が入っている．壁の物質の密度を ρ，引っ張りの強さを σ とする（図 S115 参照）．

まず，容器が破裂せずに支えることのできる，最大圧力を計算する．仮に容器が二つに切断されているとすると，気体は $p\pi R^2$ の力で，二つの部分を引き離そうとするだろう．（外部の圧力は p に比べれば無視できる．）この力は，切断部分の面積 $2\pi Rd$ と引っ張りの強さの積を超えてはならない：

$$p\pi R^2 < 2\pi R\sigma d \tag{1}$$

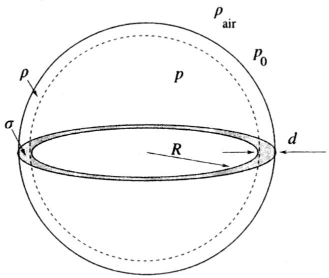


図 S115

この気体を大きな気球の中に放出すると，圧力は外部の大気圧 p_0 まで減少するので，体積は

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}\frac{p}{p_0}$$

になる．この気体は，ρ_{air} を空気の密度とすれば，$V\rho_{air}\,g$ 以上の荷重を持ち上げることはできない．(実際にはさらに，浮力から気球と水素の重さを差し引かねばならない．)

容器の重さは $4\pi R^2 d\rho g$ である．上の議論によりこの重さは，それを持ち上げる浮力を超えることはできない．すなわち

$$4\pi R^2 d\rho g < \frac{4\pi R^3}{3}\frac{p}{p_0}\,\rho_{air}\,g \tag{2}$$

不等式 (1) と (2) は，容器の物質の性質と，外部の空気の圧力および密度との間の関係

$$\frac{\sigma}{\rho} > \frac{3p_0}{2\rho_{air}} \tag{3}$$

を与える．この (3) で著しいのは，容器の半径と壁の厚さが，どちらも含まれないことである．(壁を厚くすれば高い圧力を支えることができるが，その分重くなる．) 物質の物理的性質に関する表を何冊か調べたが，条件 (3) を満たす物質はみつからなかった．今日知られているどんな物質も，単位密度あたりの引っ張りの強さが十分ではないのである．

S116　球形の地球（半径 R, 質量 M, 密度 ρ）の表面における重力加速度は

$$g = G\frac{M}{R^2} = G\frac{4\pi R^3\rho}{3R^2} = \frac{4\pi}{3}GR\rho$$

と書ける．与えられた問題を解くには，非常に大きな円板（厚さ H, 密度 ρ）の表面上で，円板の縁から十分に離れた点における，重力加速度の大きさを求めねばならない．その結果は，静電相互作用の法則と重力相互作用の法則の間の類似を用いれば，比較的容易に得ることができる．

ここで用いるのは，質量（‘重力荷’）m と電荷 q, 重力定数 G と $1/(4\pi\varepsilon_0)$, 重力加速度 $g = F/m$ と電場の強さ $E = F/q$ の間の類似である．どちらの場合にも，F は‘試験物体’が受ける力である．まず，一様な電荷分布をもつ無限に大きな円板の，円板外部の電場を求め，次に，対応する量の置換によって，同じ形の質量分布の場合の重力加速度を求める．

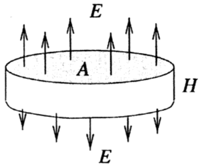


図 S116

電場の強さは，面積 A の円板に，ガウスの法則

$$\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q$$

を適用すれば求められる．ここで $\Phi_E = 2AE$ は電束である（図 S116 参照）．電荷密度が ρ_q なら，閉曲面で囲まれた全電荷は $\sum q = \rho_q AH$ である．したがって

$$2EA = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_q AH$$

で，これから電場の強さ

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\rho_q H}{2}$$

を得る．ここで上記の置換をすれば，重力加速度は $g = 2\pi G\rho H$ であることがわかる．これを地球表面で測定される重力加速度と等しいとおく．すなわち

$$G\,\frac{4\pi R\rho}{3} = g_{\text{sphere}} = g_{\text{disc}} = 2\pi G\rho H$$

で，これから‘平坦な地球’の厚さが

$$H = \frac{2}{3}\,R = \frac{2}{3}\,6370\,\text{km} = 4250\,\text{km}$$

とわかる．

S117　図 S117.1 の三角形 FHC と GKH の相似から，微小角 $\Delta\alpha$ で決まる棒の微小部分 KH に対して，等式

$$\Delta x = GH\,\frac{r}{h} = r\Delta\alpha\frac{r}{h} = \frac{r^2}{h}\,\Delta\alpha$$

が成り立つ．

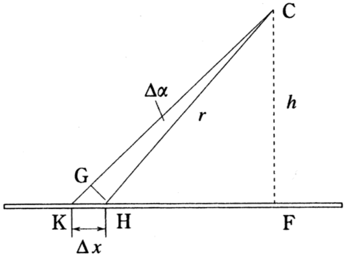


図 S117.1

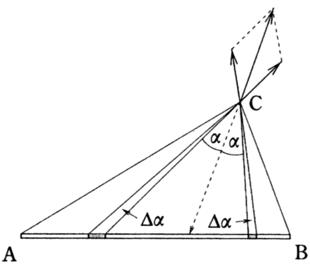


図 S117.2

棒の単位長さあたりの電荷を σ とすれば，KH の上の電荷は $\Delta Q = \sigma\Delta x$ で，この電荷がつくる電場の大きさは

$$\Delta E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\Delta Q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\sigma}{h}\,\Delta\alpha$$

である．

この量は角 α 自体の値にはよらず，棒の微小部分がCに対して張る角 $\Delta\alpha$ だけによる．それゆえ角Cの二等分線について対称の位置にある二つの微小部分がつくる電場ベクトルは，大きさは同じでそのベクトル和は角の二等分線の方向を向く（図 S117.2 参照）．

任意の点Cに対して $\angle ACB = 2\alpha$ となる α の値があり，そこまで上の結果を重ね合わせれば，題意が確かめられる．

S118 前問の結果を用いると，非常に長い棒の端を通る平面の上で，端から距離 h の点での電場の方向は，棒と 45° の角をなすことがいえる．

電場の大きさ E は，次の‘技巧’により見出せる．2本の一様に帯電した非常に長い棒の端と端をつないだとする．その結果できる電場は，2本の‘半分の棒’の電場のベクトル和である（図 S118.1 参照）．

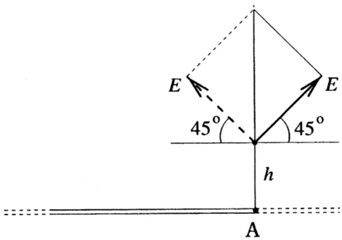


図 S118.1

こうしてできる電場の方向は，対称性から，明らかに棒と垂直である．その大きさは，1本の棒の電場 E の $\sqrt{2}$ 倍であるが，これは電気力線に対するガウスの法則を用いて見出せる．無限に長い棒の長さ ℓ の部分を，半径 h の仮想的な円筒で囲む（図 S118.2 参照）．

単位長さあたりの電荷を σ とすれば，円筒内には電荷 $Q = \ell\sigma$ があり，また円筒から出る電気力線の数（電束）は

$$\Phi_E = \sqrt{2}\,E 2\pi h\ell$$

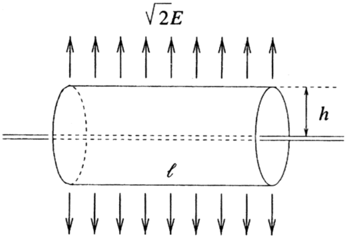


図 S118.2

である．ガウスの法則により $\varepsilon_0\Phi_E = Q$ で，これより

$$E = \frac{\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma}{h}$$

を得る．

S119　1)　開き角が 2π に近づくにつれ，点 P は電線に挟まれ，電線にいくらでも近づくので，電流が流れている電線のどちらの半分も，P に非常に大きな同方向の磁場をつくる．それゆえこの場合には，P における磁場の大きさは無限大に近づく．θ が π に近づくにつれて $\tan(\theta/2)$ も無限大に近づくので，アンペールの式は正しい可能性がある．それに対してビオとサバールが与えた表式は，有限な $B(\mathrm{P})$ を与えるので，誤りに違いない．実際，アンペールの結果は，後にマクスウェルの電磁理論に取り入れられ，真理として受け入れられている．

2)　開き角が $2\theta = \pi$ のときは，'V' は無限に長い直線の電線になる．この場合には，磁場の大きさ $B(\mathrm{P})$ は，よく知られているように $B = \mu_0 I/(2\pi d)$ である．$\tan(\theta/2) = \tan(\pi/4) = 1$ だから，アンペールの式の比例定数は $\mu_0 I/(2\pi d)$ である．

長い直線電流による磁場の式は，当時すでに一般的に受け入れられていたので，ビオとサバールもこれに一致するように式を選んだ．それゆえ彼らの比例定数は $\mu_0 I/(\pi^2 d)$ であった．

注　$\theta < \pi/2$ の領域では，二つの予言の差は比較的小さい．B に対する二つの予言値の比 $2\theta/\pi\tan(\theta/2)$ と 1 の差は，$\theta \to 0$ で最大値 $4/\pi$ を示す．

訳注 点Pの磁場を直接計算するもっとも簡単な方法は，‘V’ の半分ずつがPにつくる磁場に，変位電流を取り入れたアンペールの法則を適用するものであろう．

S120 1) 点Pにおける磁場の強さを B_1 と記すと，対称に置いた第二のコイルも，図 S120.1 に示すように，やはり強さ B_1 の磁場をつくる．

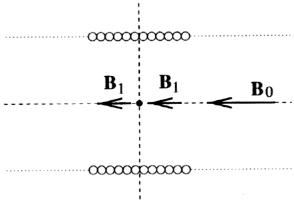


図 S120.1

重ね合わせた磁場の合計の大きさは明らかに B_0 だから，$B_1 = B_0/2$ である．

2) Pを通る磁場ベクトルの水平成分は $B_0/2$ である．上と同じ議論でわかるように，中心軸からの距離が R より小さい任意の点に対しても，同じことが成り立つ（図 120.2 参照）．

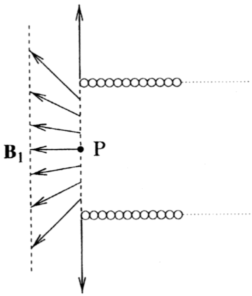


図 S120.2

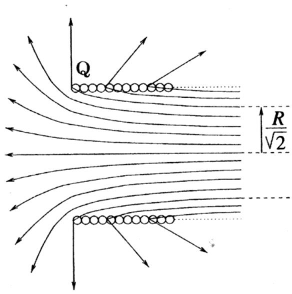


図 S120.3

それゆえソレノイドの端を通る全磁束は $\pi R^2(B_0/2)$ である．これはソレノイドの内部の磁束のちょうど半分である．残りの半分はどこへ行ったか．

3) 図 S120.3 に，磁力線を定性的に描いてある．

ソレノイドの一番端の巻線（点 Q）を横切る磁力線は，ソレノイドから直角に外へ出る．磁束のうち半分はこれより左へ進み，残りは巻線の間からコイルを出る．上の二つの部分の境界の磁力線は，ソレノイドの内部に入ると，軸から距離 $R/\sqrt{2}$ の所を通るようになる．

S121　理論上は，板の電荷を多数の小さな点電荷に分割し，点電荷のすべての対の間のクーロン力を加えて，2 枚の板の間の力を計算できる．一方の板の上の正電荷を，同じ大きさの負電荷に変えた場合を想像すると，クーロン力の大きさは変わらないが符号が反転する．すなわち斥力の代わりに，平行板コンデンサーの場合のような引力になる．このコンデンサーに貯えられるエネルギーは $E = Q^2/2C$ で，容量 C は板の間隔を x とすれば $C = \varepsilon_0 A/x$ だから，$E = Q^2 x/2\varepsilon_0 A$ である．力 F はこのエネルギーが x によって変わる割合 $F = \mathrm{d}E/\mathrm{d}x$ である．したがって面積 A の板を押さえておくのに必要な力は

$$F = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}$$

である．

訳注　一方の板の上の電荷がつくる電場が，他方の板の上の電荷に及ぼす力を考えても，同じ結果が得られる．

S122　どの極板の電荷も総量は変われない．一方，向かい合う表面上の電荷は，大きさは等しく符号は反対でなければならない．したがって C と D の電荷は，外側の表面ではそれぞれ $-1\,\mathrm{nC}$ と $+1\,\mathrm{nC}$ で，内側の表面では $+2\,\mathrm{nC}$ と $-2\,\mathrm{nC}$ である．隣り合う 2 枚の極板の間の容量は間隔に反比例し，間隔が 5 mm のときに 20 pF になる（図 S122 (次ページ) 参照）．

それゆえ AC が x mm で DB が $(3-x)$ mm ならば，3 組のコンデンサーの容量は順に $100/x$，50，$100/(3-x)$ pF である．したがって電圧 V_{CD} は 40 V，そして V_{AB} は $10x + 40 + 10(3-x) = 70\,\mathrm{V}$ で，x の値にはよらない．

S123　極板の間にある電荷を仮想的に二つの部分に分割し，両者を極板に平行に動かして引き離す．それとともに，コンデンサーの極板上に誘導された電荷も動くが，（重ね合わせの原理からわかるように）各極板上の電荷の総量は

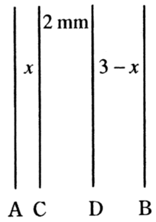


図 S122

変わらない．同じようにして電荷 Q の分割をさらに続け，極板と平行で極板と同じ大きさをもつ平面の上に，電荷を一様に‘広げる’．

その結果は，極板間隔が x と $d-x$ の二つのコンデンサーを，並列に接続したものと考えることができる．どちらのコンデンサーも一方の極板は接地され，他方の極板は共通なので，二つのコンデンサーの極板間の電圧は等しい．したがって，電場の強さは極板間隔に反比例する．すなわち電場の比は $E_1/E_2 = (d-x)/x$ である．電荷 Q から出る電束は同じ比に分かれ（ガウスの法則），接地された極板の電荷の比も同じである．両方の極板に現れる電荷の総量は $-Q$ だから，それぞれの極板の電荷は

$$Q_1 = -Q\,\frac{d-x}{x} \qquad \text{および} \qquad Q_2 = -Q\,\frac{x}{d}$$

である．

S124 コンデンサーから非常に離れた点での電場は，系の全電荷から決まる．コンデンサーの外部の電場はゼロだから，全電荷（極板上の電荷の和）もゼロでなければならない．すなわち $Q_1 = -Q_2 = Q$ である．

電気的に中性の系の遠方での電場の様子は，全電気双極子モーメントから定まる．今の場合には，極板と垂直な方向への双極子モーメントの成分をとれば

$$p - Qd = 0$$

で，これから極板上の電荷が

$$Q = \frac{|\mathbf{p}|}{d}$$

と得られる．このように，極板上の電荷は双極子の位置にはよらない．

注　1)　同じ方法は P123 にも適用できる．この場合に問題になる式は

$$Q_1 + Q_2 + Q = 0$$

$$Q_1\,x - Q_2\,(d-x) = 0$$

で，その解は

$$Q_1 = -Q\,(d-x)/d, \qquad Q_2 = -Qx/d$$

である．

2)　別法として，一つの電荷の場合の結果を利用することもできる．すなわち平行板コンデンサーの間に反対符号の二つの電荷を置き，重ね合わせの原理を用いるのである．双極子モーメントが極板と垂直でないような，もっと一般的な問題の解は，この方法で簡単に求めることができる．

S125　図 S125.1 は，屈折率の異なる複数の板を通過する光線を示す．

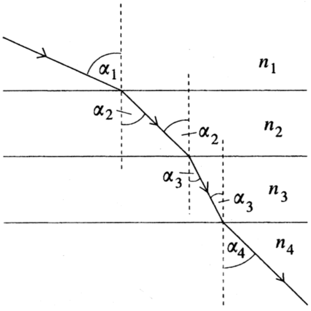


図 S125.1

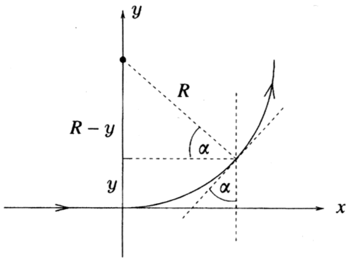


図 S125.2

スネルの法則により

$$\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1} = \frac{n_1}{n_2}, \qquad \frac{\sin\alpha_3}{\sin\alpha_2} = \frac{n_2}{n_3}, \qquad \cdots$$

が成り立つ．入射角のサインと屈折率の積はすべての境界面で同じ値をもつこと，すなわち $n\sin\alpha$ は光線の軌道に沿って一定であることがわかる．

媒質の屈折率が一方向に連続的に変化する場合も，媒質は薄い板の集まりとみなせるので，上の関係はやはり成り立つ．座標系の原点を，光線がこの媒質に入る点にとる．この場合には，$y=0$ の最初の‘板’への入射角は $90°$ で，そこの屈折率 n_0 が上の定数を $n(y)\sin\alpha = n_0$ と定める．

光線は半径 R の円弧に沿って進む．まず座標 y との関係を調べる．図 S125.2 から明らかなように，

$$n_0 = n\sin\alpha = n(y)\frac{R-y}{R}$$

で，これから場所によって変わる屈折率が

$$n(y) = \frac{R}{R-y}\,n_0$$

と得られる．既知の物質中で屈折率が最大のものはダイヤモンドであるが，それでも屈折率は $n_{\max} = 2.5$ には達しない．もし屈折率が $n_0 = 1$ から $n_{\max} = 2.5$ まで変化するなら，y の最大値は $\frac{3}{5}R$ で，円弧の角度は $66.4°$ になる．

現実には，光を円弧の上に拘束するのは難しい．しかし溶液で，溶質の濃度が（したがって屈折率が）鉛直方向に連続的に変化するものをつくることはできる．そのような媒質では，光線は円弧ではなく，別の連続曲線に沿って進む．

注 そもそも，x 軸に沿って媒質に入る光線が曲がり始めるのはなぜだろうか．その理由は，無限に細い光線というものは存在しないからである．‘光線’は常に有限の幅を持つビームであり，その断面に沿って屈折率が（したがって伝播速度が）変化する．その結果，波の先端は平面でなくなり，ビームは曲がる．

S126 物指しで CD を測れば，情報を保存する領域の，内側の直径は約 4.4 cm，外側の直径は約 11 cm で，したがって使える面積は約 $80\,\mathrm{cm}^2$ であることがわかる．情報の単位は 1 ビットなので（1 バイト = 8 ビット），1 ビットあたりの面積は

$$A = \frac{80\,\mathrm{cm}^2}{650\times10^6\times8} = 1.54\times10^{-8}\,\mathrm{cm}^2$$

である．情報 1 単位の‘形’を正方形と仮定すれば（$A=a^2$），1 ビットの 1 次元的な大きさは $a = 1.24\times10^{-4}\,\mathrm{cm} = 1.24\,\mu\mathrm{m}$ である．

CD 上の情報は，中心付近から始まり外へ向かう，非常に長い渦巻き線の上に貯えられる．この向きは，以前からある LP の場合とは逆である．CD の一部分は反射型回折格子として用いることができ，波長が既知のレーザー光線を用いて，回折パターンが測定できる．格子間隔に相当するものは溝の間隔である．垂直入射を用い，1 次の干渉の二つの山の間隔を，スクリーン上で測定するのが，もっとも簡単である．光学レーザーの典型的な波長は 670 nm で，CD とスクリーンの距離は 1 m にとるのが便利である．

格子の干渉パターンで，1 次の強度の山を表す条件は，格子間隔を d とすれば $d\sin\theta_1 = \lambda$ である．実験から $\theta_1 \approx 25°$ で，データを格子の式に入れれば，格子間隔は $d \approx 1570\,\mathrm{nm} = 1.57\,\mu\mathrm{m}$ とでる．この見積もりは前にしたものに近いが，それよりいくらか大きい．二つの結果の差は測定誤差ではなく，隣り合う溝の間に壁があることの結果である．情報を保存する部分の幅は約 $0.5\,\mu\mathrm{m}$ にすぎない．すなわち，情報に使われる全体の面積は約 $(80/3)\,\mathrm{cm}^2 \approx 27\,\mathrm{cm}^2$ だけで，1 ビットはほぼ $1\,\mu\mathrm{m}$ の長さの長方形ということになる．

注　CD 上の情報密度は一様で，読み出すヘッドの位置によって回転速度が変わる．

S127　$n\lambda = d\sin\theta = (10^{-3}\,\mathrm{m}/300)\sin 24.46° = 1380\,\mathrm{nm}$ であるから，赤と青/紫の光がスペクトルのこの部分に来るのは，n と λ の値が，$n_\mathrm{R} = 2$, $\lambda_\mathrm{R} = 690\,\mathrm{nm}$ と $n_\mathrm{BV} = 3$, $\lambda_\mathrm{BV} = 460\,\mathrm{nm}$ のときしかない．物理的には

$$n\lambda \le d\sin 90° = 3333\,\mathrm{nm}$$

の範囲だけが可能であり，ほかに比が $3m : 2m$ になるような整数の組で，m が $(3333/1380) = 2.4$ よりも小さいのは，6 と 4 しかない．したがって，二重の線が観測される角度はあと一つだけで

$$\sin^{-1}\frac{(6\times 460)}{3333} = 55.9°$$

のときである．

S128　1)　単色レーザー光が回折格子に垂直入射するときは，干渉模様の

極大の位置 θ は

$$d\sin\theta = m\lambda \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots)$$

で与えられる．ここで d は格子間隔，λ はレーザー光の波長である．回折格子を格子の線に平行な軸のまわりに角 ϕ 回転するときの，上の式の修正を考える．それには，図 S128.1 に示すような，格子の 2 本のスリットだけによる干渉を考えれば十分である．

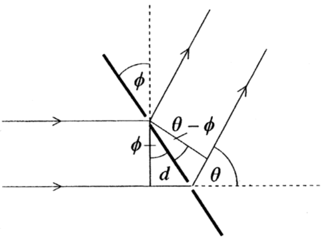


図 S128.1

光路差は二つの部分からなる：

$$\Delta_1 + \Delta_2 = d\sin\phi + d\sin(\theta - \phi)$$

したがって干渉模様に対する式は次のように変わる：

$$d\,[\sin\phi + \sin(\theta - \phi)] = m\lambda$$

主な結果は，0 次の極大の位置だけは変わらないが，干渉模様がその両側で非対称になることである．回折格子を反時計回りに回転したときの ϕ を正とすれば（θ も同じ向きを正とする），干渉模様の極大の密度は，θ の正の側では増し，負の側では減る．回折格子の線の方向を鉛直とすれば，干渉模様の極大はすべて 1 本の水平な直線の上に並ぶ．これは 2) で起こることと対照的である．

注　回折格子を回転すると格子間隔の‘実質的な’大きさが減るという素朴な考えは誤りである．

2)　回折格子は多数の同じ平行なスリットが並んだものであるから，第一段階としては，1 本のスリットからの回折を調べれば十分だろう．光線が非常に狭いスリットに垂直に入射するときは，回折模様は弱い直線である．スリットの幅を少し広げると，この直線に沿って干渉の極小が見えるようになる．

スリットを‘前方に’傾けても（つまり，スリットと光線の双方に垂直な水平軸のまわりに回転させても），0 次の極大の位置は変わらない．入射光線がスリットにあたるときの位相は，あたる場所によって異なるが，スリットの後ろ側の入射光線の方向では，位相差はなくなり（図 S128.2 参照），回折模様に変化は生じないからである．

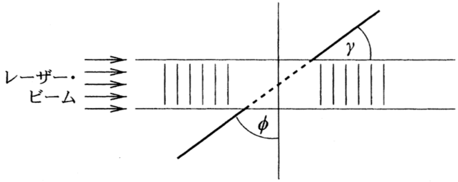


図 S128.2

議論をわかりやすくするには，スリットを，非常に小さな穴が接近して並んだものと考えるとよい．この多数の穴から出た波が，入射光線の方向で強め合う干渉をしているのだから，（回転した）スリットの方向と同じ角度をなす（3 次元の）どの方向においても，同じことが起きていなければならない．スリットが角度 ϕ 傾いているなら，スリットと入射光線の間の角は $\gamma = 90° - \phi$ である．スリットの方向を軸とし，半頂角が γ の円錐上を進む回折光は，どれもスリットとの間の角度が γ である．スクリーン上では，この円錐を平面で切った切り口（円錐曲線）が見えることになる (図 S128.3 (次ページ) 参照).

円錐の頂点はスリットの中点で，その半頂角は γ である．円錐曲線は，楕円，放物線または双曲線のどれかになる．放物線となるのは $\gamma = \phi = 45°$ のときである．

元の問題に戻ると，傾いた回折格子による干渉模様は，円錐曲線上に並ぶ明るい点からなる，というのが結論である．

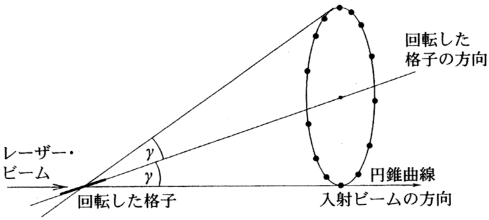


図 S128.3

S129　液体の表面張力のために，二つの物体の間の液面の高さは，物体の外側の液面の高さとは等しくない．(a) の水の場合には中間の液面の方が高く，(b) の水銀の場合（負の接触角をもつ）には中間の液面の方が低い．

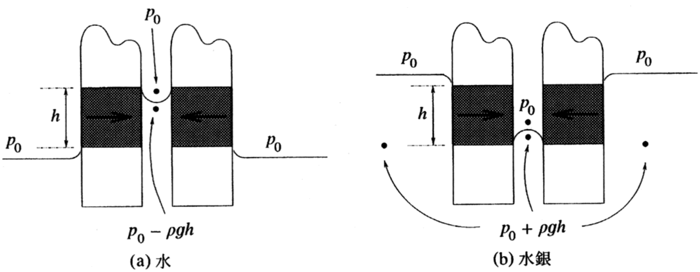


図 S129

物体の間の液面のすぐ上では，圧力はどちらの場合にも大気圧である．そのため液面のすぐ下の圧力は，水の場合には大気圧より低く，水銀の場合には大気圧より高い．その結果どちらの場合にも，図 S129 の影をつけた部分に両側から働く力の合力は，内向きの力となり，二つの物体を近づけようとする．

S130　水の圧力は，高さとともにその 1 次関数で変化する．圧力は，メニスカスの底では外部の大気圧 p_0 に等しく，頂上では $p_0 - \rho gh$ に等しい．水が壁に及ぼす平均圧力は $p_{\text{average}} = p_0 - \rho gh/2$ である．この値に対応して，横幅が ℓ の水槽の壁には力 $F_1 = \ell p_{\text{average}} h$ が働く．

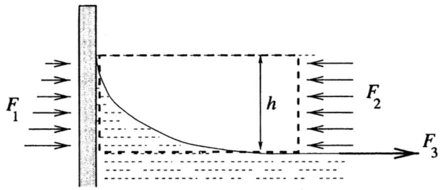


図 S130

図 S130 の点線で囲んだ部分の水全体に働く水平方向の力を考えよう．壁は水を右向きに力 F_1 で押し，大気は左向きに力 $F_2 = \ell p_0 h$ で押す．点線の外部の水の表面張力は，右向きに力 $F_3 = \ell\gamma$ で引っ張る．水全体が静止しているから，これらの合力はゼロでなければならない．これより

$$\left(p_0 - \frac{1}{2}\rho g h\right)\ell h - p_0 \ell h + \ell\gamma = 0$$

で，これを書き直して

$$h = \sqrt{\frac{2\gamma}{\rho g}} = \sqrt{\frac{2 \times 0.073}{1000 \times 10}} = 0.0038\,\mathrm{m}$$

を得る．水は水槽の壁に沿っておよそ 4 mm 昇る．

S131　表面張力 γ（これは単位表面積あたりのエネルギーに等しい）の水滴の半径 R が ΔR 減少するとき，表面エネルギー E_{surface} は

$$\Delta E_{\mathrm{surface}} = -4\pi\gamma[R^2 - (R - \Delta R)^2] \approx -8\pi R\gamma\Delta R$$

だけ変化する．同時に水滴の体積は $4\pi R^2\,\Delta R$ 減少する．これだけの水が蒸発（evaporation）するには，エネルギー

$$\Delta E_{\mathrm{evaporation}} = 4\pi L\rho R^2\,\Delta R$$

の供給が必要である．ここで ρ は水の密度，L は蒸発の潜熱である．

表面エネルギーの減少が水滴の蒸発熱を供給できるのは，$|\Delta E_{\mathrm{surface}}| < \Delta E_{\mathrm{evapor}}$
すなわち

$$R < \frac{2\gamma}{\rho L} \approx 7 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}$$

が成り立つときだが，この半径は 1 個の水分子の大きさと桁は同じなので，この半径の水滴は存在し得ない．それゆえ，熱の吸収あるいは内部エネルギーの減少なしに蒸発できる水滴は存在しない．しかし上の議論は，巨視的な性質を用いて分子の大きさを見積もるときに，用いることができる．

S132 液体とその飽和蒸気を含む密閉容器を考える．図 S132 に示すように，内径 r の毛細管を液体の中に差し込む．液体は毛細管の壁をぬらさない（壁に付着しない）とする．

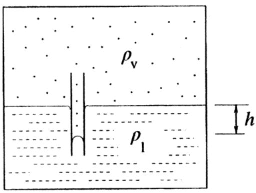


図 S132

このような状況では，毛細管内の液面は液体表面よりもある深さ h だけ下がる．h の大きさは，静水圧と液体の表面張力とがつり合う条件 $2\pi r\gamma = \rho_l g h \pi r^2$ を用いて見出すことができる．ここで，γ は液体の表面張力，ρ_l は液体の密度である．これから $h = 2\gamma/(\rho_l g r)$ が得られる．

毛細管の内部でも，外の平らな液体表面においても，液体は飽和蒸気と平衡状態にある．しかし，毛細管内部では，境界面での蒸気圧が少しだけ高い．この差は，境界面の上にある高さ h，密度 ρ_v の蒸気の円柱の圧力による．したがって液面の曲率にともなう飽和蒸気圧の増加は

$$\Delta p_v = \rho_v g h = \frac{2\gamma}{r}\frac{\rho_v}{\rho_l}$$

となる．$\rho_v \ll \rho_l$ であるから，この圧力差は，半径 r に対応する曲率による圧力 $2\gamma/r$ よりずっと小さいが，時間さえ十分長ければ，問題に述べてある現象を起こすには十分である．

訳注 上の Δp_v の導き方は，初等的だが，g を経由するため本質がみえにくい．そ

こで参考までに，熱力学による導き方の概略を述べておく．温度 T の飽和蒸気と平衡にある半径 r の液滴を考える．液滴から液体が δn モル蒸発する微小過程で，液滴の半径が δr 減るとし，それにともない系が吸収する熱を δQ，系のエントロピーの増加を δS とすれば，平衡条件は

$$\delta S = \frac{\delta Q}{T}$$

である．吸収する熱は，蒸発熱と表面エネルギー $\gamma 4\pi r^2$ の減少分の差だから，1 モルあたりの蒸発熱を λ とすれば，

$$\delta Q = \lambda \delta n - \gamma 2\pi r \delta r$$

である．δn と δr の関係は，分子量を M とすれば $\delta n = 4\pi r^2 \delta r \rho_{\mathrm{l}}/M$ だが，理想気体の状態方程式 $p = \rho_{\mathrm{v}} RT/M$ を用いれば，これは

$$\delta r = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{\rho_{\mathrm{v}}}{\rho_{\mathrm{l}}}\frac{RT}{p}\,\delta n$$

と表せる．系のエントロピー変化の主要部分は蒸気のエントロピー変化だから，

$$\delta S = (c_p \ln T - R \ln p)\,\delta n$$

と書ける．これらの式を上の平衡条件に代入し，蒸気圧 p を γ によらない部分 p_{v} と γ について 1 次の補正 Δp_{v} の和として表せば，本文の Δp_{v} の表式が得られる．

S133　ピストンの断面積を A，ピストンの最初の位置から最後の平衡の位置までの鉛直方向の変位を y とする（図 S133 (次ページ) 参照）．

荷重 W の位置エネルギーが減少すれば，シリンダー内部の空気の内部エネルギーが増加する．最初と最後の状態間でエネルギーが保存することから

$$Wy = \frac{5}{2}[p_1 A(h-y) + p_2 A(h+y) - 2p_0 Ah]$$

が成り立つ．ここで p_1 はシリンダーの下側の最後の圧力，p_2 は上側の最後の圧力である．また，二原子分子気体の内部エネルギーを $\frac{5}{2}pV$ の形に書いた．もし W が非常に大きければ，位置エネルギーの減少（および，それにともなう気体の内部エネルギーの増加）も非常に大きくなり，空気の最初の状態の内部エネルギーは無視できる．したがって上式は

$$Wy = \frac{5}{2}[p_1 A(h-y) + p_2 A(h+y)] \tag{1}$$

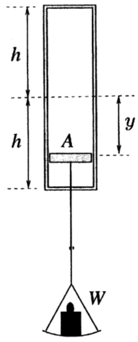


図 S133

となる．

荷重が最終的に静止したときには

$$(p_1 - p_2)A = W \tag{2}$$

ピストンの両側の気体の温度と質量は等しいから，内部エネルギーも等しくなければならない：

$$\frac{5}{2}p_1 A(h-y) = \frac{5}{2}p_2 A(h+y) \tag{3}$$

(1)，(2)，(3) から，ピストンの変位は $y = \sqrt{5/7}h$ となる．つまりピストンの下側では $1 - \sqrt{5/7} \approx 15\%$ だけ元の体積から圧縮されたことになる．

注 荷重がどんなに大きくても，ピストンの下側の空気の体積は（圧縮可能にもかかわらず）ゼロにはならないという，意外な結果が得られた．大きな荷重により内部エネルギーが増加すると，密閉された容器内の気体の温度が上がる．このため，圧力そのものが大きくなるだけでなく，ピストンの上側と下側の圧力差も大きくなるのである．

実際には，シリンダーの構造が荷重に耐える能力や，使われている材質の融点などによって，荷重の重量は制限される．また，温度が上昇したときに，空気を二原子分子理想気体として扱ってよいかという点も考慮しなければならない．

空気の最初の内部エネルギーを無視しなければ，結果は

$$\frac{y}{h} = \frac{\sqrt{35W^2 + 25p_0^2A^2} - 5p_0A}{7W}$$

となる．

S134　‘箱型’の山を考え，平均密度を ρ，底面積を A，高さを h とする．その底部にある厚さ d の層が溶けるには，融解熱を L として，$Ad\rho L$ のエネルギーが必要となる．山の全質量はおよそ $Ah\rho$ であるから，それが d だけ沈めば，$Ah\rho gd$ だけのエネルギーが放出される．山の底部がその荷重のために溶けないためには

$$Ad\rho L > Ah\rho gd \qquad \text{すなわち} \qquad h < \frac{L}{g}$$

であればよい．

必要な融解熱を金属の融解熱（200〜300 kJ · kg^{-1}）で近似すれば，地球上で可能な山の高さの最大値はおよそ 20〜30 km となる．これは数値の桁としては現実と合っている．実際には山の高さは，その底部が溶けないという条件よりも，むしろ山を形づくっている材質の強度によって制限されることを考えると，ここで概算した最高の山の高さの値は，驚くほど正確である．

地球上に比べると火星 (Mars) 上では重力はかなり小さい ($g_{\mathrm{Mars}} \approx 4\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$)．したがって，地球と同様の岩でできている山は，火星上では地球上よりも高い可能性がある．実際，火星で最も高い山であるオリンポス山の高さは 26 km である！

S135　計算を簡単にするため，空気の最初の体積および外部の気圧が，どちらも 1 になる単位系をとる．また気体定数の単位は，気体定数とモル数の積が 1 になるようにとる．それにより，通常の理想気体の方程式 $pV = nRT$ は $pV = T$ になる．この単位系でのモル比熱から普通のモル比熱を得るには，気体定数をかければよい．

空気の最初の圧力は，高さ 76 cm の水銀柱の圧力と大気圧の和で，合計 2 単位である．気体柱の長さが増すと，その分だけ水銀柱の長さが減るので，空気の体積が 1 単位から 2 単位まで膨張するのに伴い，図 S135.1（次ページ）に示

すように，空気の圧力は 2 単位から 1 単位に直線的に減少する．

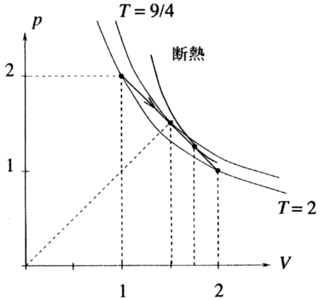


図 S135.1

封じ込めた空気の温度は最初は 2 単位で，線分の終端でも図のように 2 単位である．これは，両方の点が同じ等温線 $pV = 2$ の上にあることによる．この図では，等温線は，両軸の間の角の二等分線（すなわち直線 $p = V$）に関し対称である．そのため，到達する最高の温度は，線分に接する等温線の温度である．図のように，これは過程の中央，すなわち $p = \frac{3}{2}$，$V = \frac{3}{2}$ で起こる．したがって最高温度は $\frac{9}{4}$ である．

過程を表す直線の方程式は $p = 3 - V$ である．この直線の微小部分に熱力学第一法則を適用すれば

$$\frac{5}{2}\,\Delta T = C\,\Delta T - p\,\Delta V$$

を得る．この式の左辺は空気の内部エネルギーの変化で（二原子分子気体では $C_V = \frac{5}{2}\,R$），右辺の C が今問題にしているモル比熱である．方程式 $pV = T$ に，$p = 3 - V$ を代入した $(3 - V)\,V = T$ により，V と T の微小変化は $(3 - 2V)\,\Delta V = \Delta T$ で結ばれる．それゆえ空気の内部エネルギーの変化は

$$\frac{5}{2}\,\Delta T = C\,\Delta T - \frac{3 - V}{3 - 2\,V}\,\Delta T$$

となり，これから

$$C = \frac{21 - 12V}{6 - 4V}$$

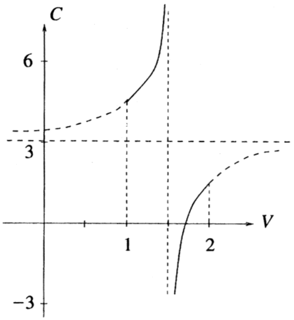


図 S135.2

が得られる．

図 S135.2 は，モル比熱に対する上の結果を，体積の関数として表したものである．この曲線は $V=\frac{3}{2}$ で特異性をもつ．（モル比熱が無限大に近づく．）この点では，直線は，最高温度に対応する等温線でよく近似されるが，等温過程では，熱の出入りがあっても温度は変わらないので，モル比熱が無限大になるのである．この点から先では，モル比熱は負になる．すなわち，空気が膨張するときにする仕事が，吸収する熱を上回るため，正の熱を吸収しても内部エネルギーは減少する．

この過程でもっとも興味がある現象は，$V=\frac{7}{4}$ で（すなわち水銀の 1/4 がまだ管に残っているところで）起こる．この点ではモル比熱はゼロで，熱の移行なしで温度が変わる．すなわち，過程は断熱的である．過程を表す直線は，この点で 1 本の断熱線に接する．この点から先では，温度はまだ下がるが，モル比熱は正になる．しかしこのようなことが起こるのは，系を冷却しているときだけである．

系の加熱を続ける場合には，代表点は直線から離れ，断熱線に沿って動く．（訳注　ここから先は空気の圧力は大気圧と水銀の重さの和より大きく，過程は準静的ではないことに注意．）このときも空気の温度は下がるが，下がり方は直線に沿うときほど大きくはない．空気の内部エネルギーの減少は，（水銀を持ち上げて

いる間に）大気圧に対してする仕事と，押し出す水銀を加速する仕事の和に等しい．

元の問題，すなわち水銀を管から押し出すのに必要な熱量の問題に戻ると，V が $V=1$ から $V=\frac{7}{4}$ の範囲にある間だけ，熱を吸収すればよいことがわかる．簡単な算数でわかるように，この点までに空気がした仕事は（今の単位で）$\frac{39}{32}$，内部エネルギーの増加は $\frac{15}{32}$ であるから，必要な熱量は $Q=\frac{27}{16}$ である．ふつうの単位でいえば，はじめに水銀柱が n モルの空気を閉じ込めていたならば，水銀を押し出すのに必要な熱量は $\frac{27}{16}nR$ である．

S136 溶けたマグマが氷と接触し，500 m の厚さの氷河の底で膨大な体積の氷が溶けた．水の密度は氷の密度より大きく（すなわち溶けた水の体積は元の氷の体積より小さく），その上，水の一部は流れ去ることもあるので，氷の下に巨大な円錐形の穴ができただろう．しかしその上の極度に重い氷が穴に落ち込んだので，表面には窪みができた．もし氷の噴火口の下を見ることができたなら，氷の中に入り込んで固化したばかりのマグマと，円錐形の空洞を満たす溶けた水，そしてそれを覆う氷が見えただろう（図 S136 参照）．溶けた水の量はマグマの量に依存するが，氷の噴火口の形は，氷と水の静水圧によって定まる．

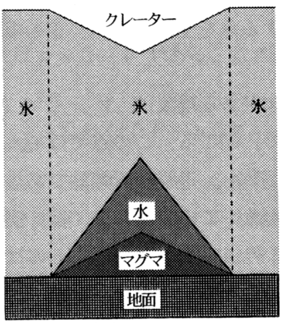


図 S136

二日目に氷を破って噴出が起き，500 m の高さの熱くて黒い灰の雲ができた．冷たい空気の浮力によって，これは 3,000 m の高さまで上った．2 週間後には，雲の柱は白くなり，10 km の高さに達していた．

2 週間の間に，全部で $3\,\mathrm{km}^3$ の氷が噴火によって溶けた．溶けた水は，氷河の氷の下を通って，近くのグリムスボルトン・カルデラという，火山性陥没の中にある湖に流れ込んだ．噴火地点では，氷の表面に，長さ 8 km，幅数百 m の深い窪みができた．溶ける速さは極度に速く，最初の 4 日間は 1 日あたり $0.5\,\mathrm{km}^3$ であった．同時に，噴火によって氷の下に，長さ 0.6 km，高さ 150〜300 m の新しい山ができた．

溶けた水は，氷河の下のグリムスボルトン・カルデラに 5 週間貯えられた後，そこから流出した．南東の低地の一部を巨大な波が押し流し，道筋にあるあらゆるもの（道路，橋その他）を破壊した．

S137　空洞は地表から h の深さにあるとする．管が水で満たされているときには，空洞中の圧力は $p = p_0 + \rho g h$ である．ここで p_0 は大気圧，ρ は水の密度である．この深さでは，沸騰が始まるのは，飽和水蒸気の圧力（$A\,\mathrm{e}^{-L_\mathrm{m}/(RT)}$）が p に等しくなるような温度に達したときである．上式のモル蒸発熱 L_m の値はほぼ $40\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$，モル気体定数 R の値は $8.3\,\mathrm{J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}}$ である．これらのデータを用いると，定数 A の値は，大気圧における水の沸点（373 K）から定まる．結果は $A = 4.1\times 10^{10}\,\mathrm{Pa}$ である．

計算の目的上，地表における大地の温度を $T_0 = 290\,\mathrm{K}$ と仮定する．温度は 1 m につき 1 度上がるので，深さ h における温度は $T = T_0 + h$ である．水が沸騰を始めるときの圧力の等式は

$$p_0 + \rho g h = A\,\mathrm{e}^{-\frac{L_\mathrm{m}}{R\,(T_0+h)}}$$

と書ける．この超越方程式は，数値解法によって，つまり，注意深い推定（！）によって解ける．解は $h = 197\,\mathrm{m}$（$\approx 200\,\mathrm{m}$）である．この深さでの圧力はほぼ 20 atm，温度は $487\,\mathrm{K} = 214^\circ\mathrm{C}$ である．

沸騰が始まると，最初の水蒸気の泡が昇って管の中の水を押し出し，圧力が 1 atm に下がるので，$214^\circ\mathrm{C}$ に過熱した水は激しく沸騰を始め，温度を $100^\circ\mathrm{C}$ に下げるのに必要な分だけ水蒸気をつくる．温度降下 $\Delta T = 114^\circ\mathrm{C}$ によって，$cm\Delta T$ だけの内部エネルギーが余る．ここで c は水の比熱，m は空洞中の水の質量である．この余ったエネルギーが $m_\mathrm{s} = 44$ トンの水蒸気（steam）をつく

るのだから，

$$cm\Delta T = Lm_{\mathrm{s}}$$

ということになる．ここで L は水の蒸発熱である．関係するデータを代入すると，空洞中の水の質量として $m = 207$ トンが得られる．このような高温での水の密度は $850\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ 程度なので，空洞の体積の近似値として $244\,\mathrm{m^3}$ が得られる．

S138　ある時間に熱伝導で持ち去られる熱は，その時間に新たにつくられる氷の，融解の潜熱に等しくなければならない．それゆえ湖の面積 A に対して

$$\lambda_{\mathrm{i}}\, A\,\frac{\Delta T}{x} = L_{\mathrm{i}}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho_{\mathrm{i}}\, Ax)$$

が成り立つ．簡単な積分で，$B = (\rho_{\mathrm{i}}\, L_{\mathrm{i}})/(\lambda_{\mathrm{i}}\,\Delta T)$ として，$t = \frac{1}{2}x^2B$ が得られる．関係する数値を代入すると，時間 t はほぼ 90 時間となる．

S139　熱伝導の法則によれば，移行する熱は，温度勾配（温度差を間隔で割ったもの），面積，および時間に比例する．それゆえ

$$\text{時間} \propto \frac{\text{熱容量}}{\text{面積}\times\text{温度勾配}} \propto \frac{L^3}{L^2L^{-1}} = L^2$$

である．$M \propto L^3$ だから，時間は $M^{2/3}$ に比例し，マンモスにかかる時間は $2\,(8000/5)^{2/3}$ 日，すなわち約 9 カ月となる．ただし，七面鳥とマンモスは同じ温度から解凍し始め，解凍は似た環境で起こると仮定している．（実際にはシベリアの夏は，マンモスを解凍するには短かすぎる.）

S140　はじめに，100°C における氷の状態と容器内の圧力について考えよう．飽和水蒸気の密度は 0.5977（≈ 0.6）$\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ で，その圧力は 1 atm だから，0.6 kg の氷は 100°C では全部水蒸気に変わる．それは 1 atm での飽和水蒸気にほかならない．

温度 −10°C での氷が，どのようにして 100°C の飽和水蒸気に変わるのだろうか．温度の増加が非常にゆっくりならば，系は一連の平衡状態を経由する．まず氷が昇華し，氷の相と蒸気の相の平衡になる．これは，温度と圧力が三重

点の温度と圧力（0.01°C，610 Pa）に達するまで続く．三重点で，氷と水蒸気のほかに，液体の相が現れる．さらに加熱すると，固体の相は消え，容器中には水と飽和水蒸気だけが残る．その後水はどんどん沸騰を続け，100°C で全部水蒸気に変わっている．

しかし熱の吸収を見るだけなら，はじめと終わりの状態だけが重要である．系が‘氷–水–水蒸気’の状態を通って内部エネルギーを増すとき，吸収する熱 Q は途中の状態には依存しない．計算のため，0.6 kg の氷の加熱を，4 段階（氷の温度上昇，氷の融解，水の温度上昇，水の沸騰）に分けると

$$Q = c_{\mathrm{i}}\, m\Delta T_1 + L_{\mathrm{f}}\, m + c_{\mathrm{w}}\, m\Delta T_2 + L_{\mathrm{v}}\, m$$

となる．ここで，$c_{\mathrm{i}} = 2.1\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}\cdot {}^\circ C^{-1}}$ は氷の比熱，$\Delta T_1 = 10^\circ\mathrm{C}$，$L_{\mathrm{f}} = 334\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$ は氷の融解熱，$c_{\mathrm{w}} = 4.2\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}\cdot {}^\circ C^{-1}}$ は水の比熱，$\Delta T_2 = 100^\circ\mathrm{C}$，そして L_{v} は水の蒸発熱である．

氷と水の比熱は温度と圧力にわずかに依存し，氷の融解熱も圧力にわずかに依存するが，これらの変化は小さく無視できる．しかしながら，水の蒸発熱については事情が異なる．確かに，蒸発熱は温度の変化では少ししか変わらないが，圧力への依存は著しい．

表にふつう与えられている数値 $L_{\mathrm{v}} = 2256\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$ は，水蒸気になるときの内部エネルギーの増加だけでなく，大気圧に対してなされる仕事も含んでいる．今の問題ではこの仕事は，容器の内部を真空にするときにすんでいる．それゆえ系に与えるべき熱は，この量だけ，すなわち $-p\Delta V = -101.3\,\mathrm{kJ}$ だけ小さい．この数値は 0.6 kg の水に対するものだから，

$$L_{\mathrm{v}} = \left(2256 - \frac{101.3}{0.6}\right) = 2087 \approx 2090\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$$

が，今の計算で用いるべき，より正確な数値である．データを入れると，熱の移行は $Q = 1720\,\mathrm{kJ}$ であることがわかる．

大気圧に対してなされる仕事を無視すると，約 6%の誤差がでる．それに対し，他の係数が温度と圧力にわずかに依存することを無視したことは，約 1%の不正確さの原因となる．上のことの主な理由は，水から水蒸気への変換にともなう体積の変化が，きわめて著しい（約 1600 倍）ことにある．氷と水の体積は

水蒸気の体積に比べれば無視できるので，解答では暗黙のうちに無視したのである．

S141 閉じた容器の中の水は，その上の空間が飽和するまで蒸発を続ける．それゆえ液体の上の全圧力は，飽和蒸気圧と，容器に閉じ込められた空気の圧力の和である．すなわち全圧力は，蒸気だけの圧力より常に高い．したがって水は，何度になっても沸騰を始めることはできない．

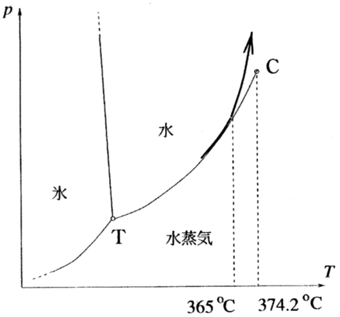


図 S141

容器が丈夫で，大きな温度上昇に耐えられるとする．温度が何度になるまで，容器の中に液体の水が存在できるだろうか．飽和水蒸気のデータ表によれば，水の臨界温度は374.2°C，臨界密度は326.2 $\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ である．そのため，臨界点 C に達する前に全部の水が蒸発することは不可能である．というのは，もし全部蒸発するとすれば，容器中の水蒸気の密度はほぼ500 $\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ になるからである．実際には，もっと低い温度で奇妙な状態変化が起こる！ 水の密度が500 $\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ になるのは約365°C で，一方この温度での飽和水蒸気の密度は160 $\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ である．そのため365°C で容器全体が液体の水で満たされる．この事実は，この領域で温度が上がるときの水の密度の減少が，水蒸気の密度の増加より大きいから，ということで説明できる．

365°C より上の温度でも，容器中の水は液体の状態にあるが，その圧力は増加する．図 S141 に示すように，系は沸騰曲線から離れ，相図の液相の領域で上

にのびる．臨界温度より上では‘液体’と‘蒸気’という用語は意味を失うので，厳密な用語で言えば，そこでは水は気体状態にあるということになろう．

容器中の空気はどのような状態にあるだろうか．問題の温度領域(360～380°C)では，空気の圧力はほぼ200～300 atmである．このような圧力では空気の一部は水に溶解し，残りは非常に小さい泡に圧縮される．それは容器の0.1～0.2%を占めるにすぎない．したがって空気は水のふるまいにはほとんど影響を及ぼさない．

S142　問題に関係があり得るのは空気分子のエネルギーだけだから，TはkTという形で現れる．変数ℓ，F，m（糸の質量），kTを用いて次元解析をすれば，振幅は変数の$(kT/F)^q\ell^{1-q}$という形の組み合わせに依存しなければならないことがわかる．ここでqは任意の値をとり得る．mは現れないので，振幅はくもの糸の質量には関係しない．

訳注　弦の固有振動のエネルギーを考えれば，$q=1/2$が導かれる．

S143　くもの巣の上にできた，円柱状の水の糸の表面エネルギーと，その糸が変身した，周期的な水滴の列の表面エネルギーを比較しよう．最初の水の糸の半径をr，水滴の列の‘波長’（すなわち水滴の間隔）をλ，水滴の半径をRと記す（図S143参照）．単位面積あたりの表面エネルギーをγとする．それ以外のエネルギーは（重力エネルギーも含めて）無視することができる．

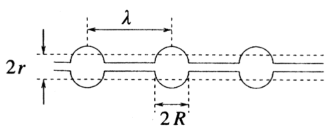


図 S143

最初は，長さLの円柱状の水の糸ができる．その表面エネルギーは

$$E_1 = 2\pi r L\gamma$$

である．それが半径 R の水滴 L/λ 個に変わる．その表面エネルギーは

$$E_2 = 4\pi R^2 \frac{L}{\lambda}\gamma$$

で与えられる．ここで，くもの巣の糸自体の太さと表面積は無視した．

半径 R は物質の保存則

$$\pi r^2 L = \frac{4\pi R^3}{3}\frac{L}{\lambda}$$

から定まる．水滴の形成によって表面エネルギーは減らねばならないから，$E_2 < E_1$ である．これらの式から R を消去すれば，$\lambda > \frac{9}{2}r$ を得る．この結果は，水滴の列の‘波長’が，最初の水の糸の半径に比例する，ある臨界値 $\lambda_{\rm crit}$ より大きくなければならないことを示す．

注 1) ベルギーの物理学者プラトー (Joseph A. F. Plateau, 1801–1883) は，臨界‘波長’は，実は上の値より大きいことを初めて示した．彼は，水の糸の表面張力に由来するくびれを調べて，$\lambda_{\rm crit} = 2\pi r$ を見出した．水の糸の半径が周期的に変化していると仮定して，液体表面の曲率に基づく圧力差の効果を考えたのである．

2) ノーベル賞を受けた英国の物理学者レイリー (John W. S. Rayleigh, 1842–1919) は，水の糸の安定性を調べてこの問題に最終的な結論を与えた．水滴の生成についての非常に注意深く詳細な計算に基づく結果は，$\lambda = 9.02r$ である．

S144 1) 初期には，右から来て弾性的に跳ね返る粒子の方が，左から非弾性的に衝突する粒子よりも，大きな運動量を物体に与える．この理由で，合力は左向きで，物体を左へ加速する．物体の左向きの速さが上がるにつれて，単位時間に右から物体に衝突する粒子の数は少なくなり，また，衝突したときの粒子と物体の相対速度は小さくなる．左から物体に衝突する粒子に対しては，上と逆のことが成り立つ．こうして，物体に働く合力は時間とともに減少する．

十分長い時間がたつと，物体は一定速度 v_1 で動くようになる．この平衡に達するのは，粒子が右と左から，単位時間に同じ運動量を物体に与えるようになったときである．

右からの粒子は，相対速度 $v_0 - v_1$ で物体に達し，同じ相対速度で跳ね返される．微少時間 Δt の間には，距離 $(v_0 - v_1)\,\Delta t$ 以内のところにいる粒子が円柱に達し，各衝突は $2\,(v_0 - v_1)$ に比例する撃力を物体に与える．それゆえ右から

の力は $2(v_0 - v_1)^2$ に比例する．同様に，左から相対速度 $v_1 + v_0$ で非弾性的に物体に衝突する粒子は，$(v_1 + v_0)^2$ に比例する力をつくる．速度一定の条件は

$$2(v_0 - v_1)^2 = (v_0 + v_1)^2, \qquad v_1 = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} v_0 \approx 0.17 v_0$$

である．

2)　衝突する粒子は，ある温度の気体の分子であるとする．物体が，非常に長時間後にも一定速度で動き続けるとすると，これは第二種の永久機関（永久運動をする機械）ができたことを意味する．すなわちただ一つの熱源から，エネルギーを連続的に引き出す熱機関ができたことになる．あらゆる経験は，そのような熱機関はつくれないことを教える．

上の推論のどこに誤りがあるのだろうか．実は非弾性衝突でできる熱を，まだ考慮に入れてなかったのである！　円柱の左端に非弾性的に衝突する粒子は，円柱を熱する．この熱をたえず取り除けば（すなわち物体を冷却すれば），1) で述べた運動は続くことができる．この結果は，二つの熱源，すなわち衝突粒子の気体と冷却媒体の間で働く，通常の熱機関である．

しかし物体を冷却しなければ，物体はいずれ温まる．温まった物体の（表面の）分子は，物体の温度に対応する平均速度で振動する．この物体から跳ね返される気体分子の速度は，冷たい物体から跳ね返されるときと比べ，もっと大きかったり，もっと小さかったりする．その結果物体は，左右どちらの端でも，気体からそれ以上熱を吸収できなくなる（もしできれば，物体はさらに温まる）．そうすれば，どちらの端の衝突も—時間平均をすれば—実質上弾性的になり，両側からの撃力は等しくなる．こうして，非常に長い時間の後，熱平衡に達すれば，物体は停止せざるを得ない．

S145　宇宙探査機は太陽系から非常に遠いので，太陽からの輻射および宇宙背景輻射は無視してよいだろう．保護シールドがない場合には，核エネルギー源から発生する熱は，探査機表面から，シュテファン–ボルツマンの法則

$$I = \sigma A T^4$$

に従って，熱輻射として放出される．ここで σ はシュテファン–ボルツマン定数，A は宇宙探査機の表面積，T は表面温度である．薄い保護シールドで探査

機を囲むときには，シールドの外側表面から，上と同じ輻射が放出される．ゆえにシールドの温度は T でなければならない．しかしシールドは，内側にも輻射を出す．その結果探査機表面は，宇宙空間への輻射と同量の輻射を吸収することになる（図 S145 参照）．それゆえ探査機表面は，全部で $2I$ の輻射を

$$2I = \sigma A T_1^4$$

で決まる新しい温度 T_1 で放出しなければならない．これより $T_1 = \sqrt[4]{2}\,T$ がでる．

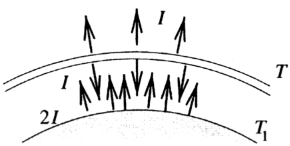


図 S145

N 枚の保護シールドの場合にも，それらを通り抜けて外へ出る輻射は I である．前の議論をくり返し適用すれば，探査機からの輻射は $(N+1)I$ で，探査機の表面温度は $T_N = \sqrt[4]{(N+1)}\,T$ であることがわかる．

注 上の結果は，非常に大きな N に対しては正しくない．その理由は，外のシールドほど表面積が大きくなることを無視したからである．

S146 絶対温度 T にある物体が熱 ΔQ を吸収するとき，エントロピーの変化は $\Delta S \geq \Delta Q/T$ である．等号は可逆過程のときに成り立つ．

温度 T_1 および T_2 にある二つの物体が，可逆的に熱 ΔQ_1 および ΔQ_2 を受け取り，その結果，温度が ΔT_1 および ΔT_2 だけ微小変化するとしよう．全系のエントロピー変化は

$$\Delta S_1 + \Delta S_2 = \frac{\Delta Q_1}{T_1} + \frac{\Delta Q_2}{T_2} \geq 0$$

で，これは

$$\Delta Q_1 T_2 + \Delta Q_2 T_1 \geq 0$$

と書ける．両方の物体は同じ質量をもつので，両方の物体が受け取る熱と温度変化の比は等しい．したがって上の式は

$$(\Delta T_1)\,T_2 + (\Delta T_2)\,T_1 = \Delta(T_1T_2) \geq 0$$

と表せる．すなわち，二つの物体の温度の幾何平均は，(増加はしてもよいが) 減少はできない．

この関係は過程の間，常に成り立つので，はじめの状態と終わりの状態に対しても成り立つ．すなわち，最後の共通の温度は，少なくとも $\sqrt{T_1T_2}$ でなければならない．エネルギーを外に取り出さない場合には，共通の最終温度ははじめの二つの温度の算術平均である．それゆえ外に取り出せる最大エネルギーは

$$\left(\frac{T_1+T_2}{2} - \sqrt{T_1T_2}\right) mc$$

である．ここで m は水の全質量，c は水の比熱である．

訳注　上のスマートな解答だけではピンとこない人のために説明を付け加える．温度が異なる二つの熱源から取り出せる最大の仕事は，その間で働くカルノーサイクルがする仕事である．ただし，各熱源の熱容量 $C = cm/2$ が有限なため，サイクルをくり返す間に熱源の温度は変化していく．低温熱源の温度が T_1' のときの高温熱源の温度を T_2' とすると，上で説明されているように，可逆過程の場合には $T_1'T_2' = \mathrm{const} = T_1T_2$ が成り立ち，とくに最終の温度は $T_\mathrm{f} = \sqrt{T_1T_2}$ である．今，低温熱源の温度が T_1' から $T_1' + \mathrm{d}T_1'$ に上がる微小過程を考えると，その間に取り出される仕事は

$$\mathrm{d}A = -(\mathrm{d}Q_1 + \mathrm{d}Q_2) = C\left(\frac{T_2'}{T_1'} - 1\right)\mathrm{d}T_1' = C\left(\frac{T_1T_2}{T_1'^2} - 1\right)\mathrm{d}T_1'$$

で，これを T_1' について T_1 から T_f まで積分すれば，本文の結果が得られる．

S147　体積 V の中に閉じ込められている N 粒子の系が到達できる微視的状態の個数は，古典的立場と量子力学的立場のどちらからも，V^N に比例する．今の場合には，はじめは体積 $2V_0$ ($V_0 \approx 0.0224\,\mathrm{m}^3$) に $2N_A$ 個のヘリウム分子と，$3V_0$ に $3N_A$ 個の酸素分子がいる．仕切りを取り除いた後は，体積 $5V_0$ に $5N_A$ 個の分子がいるので，後とはじめの微視的状態の個数の比は

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{(5V_0)^{2N_A}}{(2V_0)^{2N_A}} \times \frac{(5V_0)^{3N_A}}{(3V_0)^{3N_A}} = \frac{(5V_0)^{5N_A}}{(2V_0)^{2N_A}(3V_0)^{3N_A}}$$

である．したがってエントロピーの変化は

$$\Delta S = k \ln \frac{W_2}{W_1} = kN_{\mathrm{A}} \left(5 \ln 5 - 2 \ln 2 - 3 \ln 3\right) = 27.9\,\mathrm{J} \cdot \mathrm{K}^{-1}$$

となる．

注　どちらも s.t.p. にある二つの同種の気体（たとえば 2 モルのヘリウムと 3 モルのヘリウム）の混合を調べても，エントロピー変化の計算結果は上と同じようにみえる．しかし物理的には何も変化していないのだから，明らかにエントロピー変化はあり得ない．これは ギッブスのパラドックス と呼ばれている．このパラドックスの解決は，同種粒子は識別不可能という量子力学の原理によらねばならない．

S148　ポンプの 1 回の圧縮過程を 2 段階に分けて考えよう（図 S148 参照）．まず，両方のバルブを閉めた状態で，ピストンが空気を等温的に圧縮する．ポンプ内部の圧力が容器内部の圧力に等しくなったところで，内側のバルブを開き，それから後は全体の空気を等温的に圧縮する．内側のバルブを開く時期はだんだんに遅くなる．そのことが仕事の計算をかなり複雑にするが，幸い，もっと簡単な方法がある！

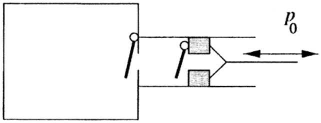


図 S148

この過程の終わりに容器中にある空気の量を考えよう．それは，はじめにあった 10 リットルと，その 9 倍の量，すなわち大気圧の下で 90 リットルを占めていた空気である．これだけの量の空気が 10 リットルの体積を占める．

熱力学第一法則によれば．空気にされた仕事 W と空気に移った熱 Q の和は，空気の内部エネルギーの増加に等しい．今は空気の温度が変化しないので，内部エネルギーは変化しない．ゆえに $W + Q = 0$，すなわち空気にされた仕事は，空気が放出する熱 $-Q$ に等しい．

さらに，一定温度 T の下での空気のエントロピーの変化は，可逆過程では

$\Delta S = \Delta Q/T$ である．空気のエントロピーの変化が計算できれば，空気が放出する熱が決まり，空気になされる仕事も決まる．

N 個の分子が，はじめ占めていた体積の 1/10 の体積に圧縮されると，可能な微視的状態の個数は，はじめの値の $1/10^N$ になる．エントロピーの統計的解釈により，気体のエントロピーの変化はこの値の対数にボルツマン定数をかけたもの，すなわち

$$\Delta S = k \ln\left(\frac{1}{10^N}\right) = -kN \ln 10$$

である．これから，気体が放出する熱として

$$-\Delta Q = -T\,\Delta S = NkT \ln 10 = nRT \ln 10 = 10 p_0 V_0 \ln 10$$

が得られる．それゆえ，なされた仕事は

$$W = 10 \times 10^5\,\mathrm{Pa} \times 10^{-2}\,\mathrm{m}^3 \times \ln 10 \approx 23\,\mathrm{kJ}$$

である．

訳注　この結果は，大気圧 p_0 の下で体積 $10V_0$ を占めていた空気を，体積 V_0 まで等温圧縮するのに要する仕事として，簡単に計算することもできる．

S149　地球とその遠方の惑星の間には電位差があるのだから，電場がなければならない．電場は宇宙船の壁の中の電荷分離を引き起こし，その結果宇宙船内部では電場はゼロになる（ファラデー・ケージ効果）．

宇宙船と惑星の間の電位差は，飛行の間に変化する．電位差は惑星からの距離にほぼ比例する．電位差は飛行の初期には非常に大きいが，ゆっくりと減少し，最後にゼロになる．それゆえ，宇宙船が惑星に着陸するときには，宇宙船の電位は惑星の電位と厳密に等しくなり，飛行士は安全に外に出ることができる．

S150　電荷 Q を帯電している容量 C のコンデンサーのエネルギーは $Q^2/(2C)$ である．コンデンサーのエネルギーの変化がわかれば，容量の変化も計算できる．

コンデンサーがへこむと，エネルギーは高くなる．というのは，表面電荷相互間の斥力が働く方向と反対の方向に，電荷が移動したからである．別の見方では，静電場は単位体積あたり $\varepsilon_0 E^2/2$ のエネルギーをもっているが，コンデン

サーがへこむと，これまで電場がなかった所に電場ができるので，エネルギーが増すのである．

コンデンサーの表面がわずかに変わっただけなら，表面付近の電場は前と同じだとしてよい．そうすると，エネルギーの変化は体積の変化だけに依存し，へこみの具体的な形には依存しないことになる．

そこで，元のコンデンサーの表面をたたいて，形は球面のままで，体積を 3%減らすことを考えよう．このとき（球の体積は半径の 3 乗に比例するので）半径は 1%減る．この小さくなった球面コンデンサーのエネルギーと元のコンデンサーのエネルギーの比は，へこんだコンデンサーのエネルギーと元のコンデンサーのエネルギーの比に等しい．したがって容量の相対的な変化も，両方の場合で同じである．

最後に，球面コンデンサーの容量は半径に比例する．したがって，小さくなったコンデンサーの容量は 1%減る．そこで，元の問題のへこんだコンデンサーの容量も，同じだけ減ったことになる．

S151 表面 F と F^* が同じ量の電荷を帯電しているなら，F の場合の静電エネルギーの方が低いことを，以下のように証明できる．

新しい表面 F^* から出発する．この面の上の電荷を面に‘固定’するとしよう．次にこの電荷が面と直交する方向に移動するように，面を外側にたたいて変形する．面ははじめ等電位面だったので，電場の方向は面と直交していた．それゆえ，この過程で系のエネルギーは減少する．（表面電荷には，電荷の符号によらずに，外向きの力が働く．外向きの電場は正電荷から出るし，内向きの電場は負電荷がつくる．）

新しい面は一般には等電位面ではないが，ここで固定した電荷を‘解放’すると，電荷は移動し，その間に金属をいくらか熱する．こうして，新しい平衡の位置では，系の静電エネルギーは下がる．

この過程を，面 F^* が面 F に一致するまでくり返す．この間，静電エネルギーは常に減少し，一方，金属上の全電荷 Q は変化しない．静電エネルギーは容量 C に $Q^2/2C$ の形で依存するので，表面 F は表面 F^* よりも大きい容量をもつ．

S152　面積 A の平行板コンデンサーの容量は $C = \varepsilon_0(A/d)$ である．電圧 V につないだコンデンサーのエネルギーは

$$W = \frac{1}{2}CV^2 = \varepsilon_0 \frac{AV^2}{2d}$$

と表せる．極板の間隔を d から $2d$ に増すと，容量とエネルギーはどちらも元の値の半分に減少する．コンデンサーの極板を引き離すには正の仕事がいるので，上の結果は意外かもしれない．しかし，極板上の電荷が ΔQ 減れば，電池のエネルギーは ΔQV 増す（電池が充電される）．$\Delta Q = \Delta CV$ だから，電池のエネルギーの増加は，コンデンサーのエネルギーの減少のちょうど2倍である．電池のエネルギーの増加は，半分はコンデンサーのエネルギーの減少に基づき，半分は極板を引き離すのにされた仕事に基づく．

注　上で述べたことは，なされた仕事を直接計算して確かめることができる．平行板コンデンサーの極板間に働く引力は，$F = Q^2/(2\varepsilon_0 A)$ という関係を用いて計算できる．電荷を電圧と容量で表せば

$$F = \frac{C^2V^2}{2\varepsilon_0 A} = \frac{\varepsilon_0 AV^2}{2d^2}$$

となる．極板の間隔を x と記せば，なされた仕事は

$$W = \int_d^{2d} F(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\varepsilon_0 AV^2}{2}\int_d^{2d}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{\varepsilon_0 AV^2}{2}\frac{1}{2d} = \frac{\varepsilon_0 AV^2}{4d}$$

と計算できる．それゆえ極板を引き離すのにされた仕事はコンデンサーのエネルギーの減少に等しく，この二つがいっしょになって電池のエネルギーの増加になる．

S153　両端をつないで閉回路にした，超電導状態の N 巻のコイルに，電流 I_0 が流れているとしよう．コイルの断面積は $A = \pi R^2$ である．コイル内部の磁場の強さは $B = \mu_0 I_0 N/x_0$ で，全磁束は $\Phi = BAN = \mu_0 I_0 N^2 A/x_0$ である．コイルの長さが何かの理由で変わっても，磁束は変わらない．もし変わればコイルに電圧が誘起され，抵抗ゼロのコイルに‘無限大の’電流が流れるからである．それゆえ電流は，長さ x とともに $I(x) = I_0 x/x_0$ のように変わらねばならない．長さ x のコイルのインダクタンスは $L(x) = \mu_0 N^2 A/x$ で，電流 I が流れているコイルの磁気エネルギーは

$$W_\mathrm{m} = \frac{1}{2}LI^2 = \mu_0 \frac{N^2 I_0^2 A}{2x_0^2}\,x$$

である．このようにコイルのエネルギーは x に比例する：$W_{\mathrm{m}}(x) \propto x$．比例定数 F_0 は収縮の磁気力である．というのは，コイルを長さ x に引き戻すのに，仕事 $W = F_0 x$ を要するからである．

コイルが静止するのは，収縮の磁気力と弾性力 $F(x) = k\,(x_0 - x)$ がつり合うとき，すなわちばねの長さの変化が

$$\Delta x = x_0 - x = \frac{F_0}{k} \approx \mu_0\,\frac{\pi I_0^2 N^2 R^2}{2kx_0^2}$$

のときである．

S154　1)　磁石 A に働く水平方向の力は（x が増す方向，すなわち問題の図 P154 で左向きに測って）

$$F(x) = -\frac{K}{x^n} + mg\,\frac{d+s-x}{\ell} \tag{1}$$

である．ここで $d+s$ は，磁石 B から磁石 A の元の位置までの距離である．平衡の条件は

$$F(x)|_{x=d} = 0 \tag{2}$$

である．平衡の安定性は，$x = d$ の付近での関数 $F(x)$ のふるまいに依存する．この関数は，単調増大または単調減少の可能性がある（図 S154.1 参照）．

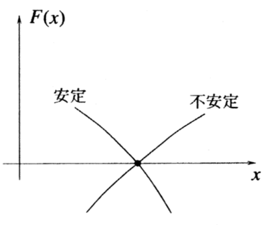


図 S154.1

平衡が安定のためには，微係数は負でなければならない．不安定の場合には微係数は正で，その極限の中立平衡の場合には，微係数はゼロである．すなわち

$$F'(x)|_{x=0} = 0 \tag{3}$$

力の表式 (1) を用いれば，条件 (3) は

$$\frac{nK}{d^{n+1}} - \frac{mg}{\ell} = 0 \tag{4}$$

と表せる．一方条件 (2) は

$$-\frac{K}{d^n} + \frac{mg}{\ell}\, s = 0 \tag{5}$$

の形に書けるので，この二つの式から

$$n = d/s = 4 \qquad \text{および} \qquad K = mgd^4 s/\ell \tag{6}$$

を得る．

2) 鉛直な管 (図 S154.2) の中では，磁石 A に働く斥力は $F_{\mathrm{vert}}(x) = +K/x^4 - mg$ である．

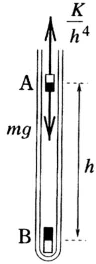


図 S154.2

二つの磁石の間隔が h のとき平衡浮遊が起こるなら

$$F_{\mathrm{vert}}|_{x=h} = 0$$

であり，結果 (6) を考慮に入れれば

$$h = \left(\frac{K}{mg}\right)^{1/4} = d\left(\frac{s}{\ell}\right)^{1/4} = 4\,\mathrm{cm} \times \left(\frac{1}{100}\right)^{1/4} \approx 1.3\,\mathrm{cm}$$

を得る．

S155　最終的にコンデンサーに貯えられるエネルギーは，どちらの場合も $\frac{1}{2}CN^2\mathcal{E}^2$ である．電池全体を直接コンデンサーにつなぐ場合には，これと同量のエネルギーが（ジュール熱として）失われる．段階的に充電する場合には，電池がする仕事の総量は

$$\Delta Q \sum (\Delta V) = C\mathcal{E}\,(\mathcal{E} + 2\mathcal{E} + \cdots + N\mathcal{E}) = \frac{1}{2}\,C\mathcal{E}^2 N(N+1)$$

で，失われるエネルギーは

$$\frac{1}{2}\,C\mathcal{E}^2\,(N(N+1) - N^2) = \frac{1}{2}\,C\mathcal{E}^2 N$$

となり，元の損失の $1/N$ にすぎない．

注　同じ結果は，次のグラフを考えて得ることもできる．

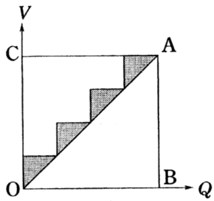


図 S155

三角形 OAB はコンデンサーに貯えられるエネルギーを表し，三角形 OAC は一段で充電するときに失われるエネルギーに当たる．影をつけた小さな三角形は多段階（たとえば $N = 4$）を用いるときに失われるエネルギーを示す．影をつけた三角形の全面積は，OAC の面積の $1/N$ である．

S156　貯えられるエネルギーはどちらの場合も $Q^2/2C$ で，$C_{\text{oil}} = \varepsilon C_{\text{air}}$ である．それゆえ油を流し出すと，エネルギーは ε 倍に増加する．落とし穴は，油は電場が強い方に引きつけられるので，油をそこから取り出すには，仕事をしなくてはならないことである．少なくとも，貯えられるエネルギーの増加分だけの仕事が必要である．

S157　1)　コンデンサーの極板の面積を A，極板間の間隔を d，極板上の電荷を Q とする．図 S157 に示すように，長さ ℓ の絶縁体の板のうち，長さ x の部分がすでに極板間に入っているときを考える．

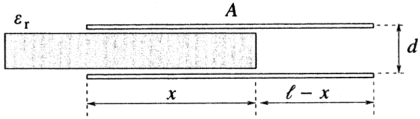


図 S157

この状態でのコンデンサーの容量は，極板間を誘電体で満たしたコンデンサーと，間に何も入っていないコンデンサーを，並列につないだものとして

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d}\frac{x}{\ell} + \varepsilon_0 \frac{A}{d}\frac{\ell - x}{\ell} = \frac{\varepsilon_0 A}{\ell d}[(\varepsilon_r - 1)\,x + \ell]$$

と計算できる．すなわち全容量は，$\varepsilon_0 A/d$ からその ε_r 倍まで，x の 1 次関数として増加する．今の場合は電荷が一定だから，コンデンサーのエネルギー W は

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 \ell d}{2\varepsilon_0 A[(\epsilon_r - 1)\,x + \ell]}$$

と書ける．明らかに，x が増すとコンデンサーのエネルギーは減少する！　それゆえ，絶縁体を挿入するときにされる仕事は負である．すなわち実際には，極板が絶縁体を引き込む．

このときの力の大きさは，x の微小変化に対する仕事を，その結果生じるエネルギーの変化と等置して計算できる（$F\,\Delta x = \Delta W$）．すなわち W の表式を微分して

$$F = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x} = -\frac{(\varepsilon_r - 1)\,Q^2 \ell d}{2\varepsilon_0 A[(\varepsilon_r - 1)\,x + \ell]^2}$$

が得られる．上の表式の分母は x とともに増加するので，力の大きさは $x = 0$ のとき最大である．容易にわかるように $x = \ell$ では，力の大きさは ε_r^2 分の 1 に減っている．

注　電場は誘電体に，どのようにして極板と平行な力を及ぼすのだろうか．（よく描かれているコンデンサーの図のように）電場が極板と垂直で一様，また外部ではゼロ

ならば，誘電体の板に力が働くことは不可能である．上の現象は，極板の端で必然的に存在する電場の曲率によって説明される．

2)　誘電体に働く力が，コンデンサーと周囲の間の関係に依存することはあり得ない．それゆえ電圧一定の場合にも，極板の間に絶縁体の板を入れると，$Q = CV$ という関係に従ってコンデンサーの電荷が変化することを別にすれば，上の結果がそのまま成り立つ．上の表式に（x によって変わる）電荷を代入すれば

$$F = -\frac{\varepsilon_0 A\,(\varepsilon_{\mathrm{r}} - 1)\,V^2}{2\ell d}$$

が得られる．すなわちこの場合には，絶縁体の板に働く力は一定である．

電圧一定のときのコンデンサーのエネルギーの表式

$$W = \frac{CV^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 A[(\varepsilon_{\mathrm{r}} - 1)\,x + \ell]V^2}{2\ell d}$$

から，興味ある結論が一つ引き出せる．すなわち，この場合には，コンデンサーのエネルギーは x の1次で増加するので，絶縁体の微小変位 Δx に対応するエネルギーの変化 ΔW は

$$\frac{\Delta W}{\Delta x} = \frac{\varepsilon_0 A\,(\varepsilon_{\mathrm{r}} - 1)\,V^2}{2\ell d}$$

である．符号を除けばこの式は，絶縁体の板に働く力の式にまさに一致する．この結果は次のようにいうことができる．誘電体を極板間に挿入すると，系が仕事をする (すなわち誘電体を引き込む)．しかし，コンデンサーのエネルギーは，その仕事と同じ量だけ増加する．それが起こり得るのは，電池のエネルギーがその2倍だけ減少するからである．電池に貯えられたエネルギーが減少するのは，コンデンサーの容量の（したがって電荷の）増加により，電池が余分の電荷を供給しなければならないからである．電池がする仕事の計算は，読者に残しておこう．

S158　鎖の一番奥から順番に，抵抗に番号をつける．1番目の抵抗を1Aの電流が流れるので，2番目の抵抗にも1Aの電流が流れねばならず，それゆえどちらの抵抗の両端の電位差も1Vである．その結果，3番目の抵抗の両端の

電位差は $(1+1)=2\,\mathrm{V}$ で，これを流れる電流は $2\,\mathrm{A}$ でなければならない．次の抵抗を流れ得る電流は $(1+2)=3\,\mathrm{A}$ である．5 番目の抵抗を流れる電流は，$2\,\mathrm{A}$ と $3\,\mathrm{A}$ の電流が流れる二つの抵抗の両端の電位差が $(2+3)=5\,\mathrm{V}$ であることを用いて決まる，等々（図 S158.1 参照）．

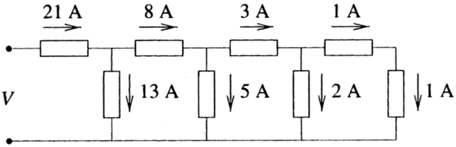


図 S158.1

図の一番右から始めて，交互に直列と並列をくり返してつないだ，抵抗の鎖を考える．前の二つの抵抗を流れる電流の和が，次に直列につなぐ抵抗を流れる（キルヒホッフの第一法則）．次に並列につなぐ抵抗は，鎖に新しいループをつくるので，その抵抗の両端の電位差は，前の二つの抵抗の両端の電位差の和に等しい（キルヒホッフの第二法則）．$1\,\Omega$ の抵抗に対しては，（その両端の）電位差と（それを流れる）電流の数値が等しいので，前の二つの抵抗の電流の和は，新しく並列につなぐ抵抗の電流に等しい．こうして，このいわゆる梯子型回路では，各抵抗を流れる電流（およびその両端の電位差）が，前の二つの要素の電流（電位差）の和に等しいという形で，キルヒホッフの法則が満たされる．

電流（あるいは電位差）の数値が，フィボナッチ数列：1，1，2，3，5，8，13，21 の各項であることに注意しよう．最後の二つの抵抗の両端の電位差は $(21+13)=34\,\mathrm{V}$ で，これはまた，回路にかける入力の電位差でもある．$34\,\mathrm{V}$ の電位差をかけた結果，全部で $21\,\mathrm{A}$ の電流が流れるのだから，回路の等価抵抗は $34/21=1.61905\,\Omega$ である．

もう一つの抵抗を鎖に（並列に）つなぐと，その両端の電位差は $34\,\mathrm{V}$ で変わらないが，全電流は $(21+34)=55\,\mathrm{A}$ に増す．この場合には等価抵抗は $34/55=0.61818\,\Omega$ である．さらに 1 個の抵抗を回路につなぐと，それに $55\,\mathrm{A}$ の電流が流れ，入力電位差は $(34+55)=89\,\mathrm{V}$ に増す．鎖の全抵抗は $89/55=1.61818\,\Omega$ になる．

梯子型回路を次々に伸ばしていくと，‘無限に長い’鎖が得られる．この鎖の等価抵抗は，抵抗をあと二つ加えても全抵抗は変わらない，という事実を用いて計算できる．すなわち，鎖全体を一つの抵抗 R で置き換えるとき，それに二つの $1\,\Omega$ の抵抗を，一つは並列に，もう一つは直列につないでも，新しい回路の等価抵抗はやはり R である（図 S158.2 参照）．

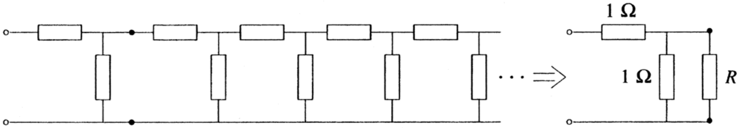


図 S158.2

そのための条件は

$$R = 1\,\Omega + \frac{1}{(1/1\,\Omega) + (1/R)}$$

で，これは R の数値に対する 2 次方程式

$$R^2 - R - 1 = 0$$

になる．この式の正の解は，‘無限に長い’鎖の等価抵抗

$$R = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803\,\Omega$$

を与える．この‘無限に長い’鎖の等価抵抗は，抵抗の個数が 8 個あるいは 10 個の鎖の等価抵抗で，非常によく近似されることがわかる．それゆえ，かなり少ない要素の梯子型回路でも，無限に長いとみなせる．

注　1)　応用として，電力供給用の空中架線回路の中性線を，梯子型回路と考えることができる．中性線は電柱に固定され，たとえば電柱 10 本おきに接地される．この梯子型回路は 2 種類の抵抗からなるが，‘無限に長い’鎖の等価抵抗は，上の方法で計算できる．

2)　面白いことに上の方程式は，黄金比の方程式，すなわち解が黄金比 $(1+\sqrt{5})/2 = 1.61803\cdots$ を与える方程式でもある．上で見たように，これは無限に長い梯子型回路の等価抵抗の数値と同じである．さらに上で見たように，フィボナッチ数列の隣り合

う要素の比は，驚くほど速く黄金比に近づく．また容易に証明できるように，偶数番目の要素をその前の奇数番目の要素で割ったものは，黄金平均に下から近づくのに対し，奇数番目の要素をその前の偶数番目の要素で割ったものは，黄金平均に上から近づく．

最後に，連分数の美しさを楽しむために，$1\,\Omega$ の抵抗からなる無限に長い鎖の等価抵抗を，1 を用いて表してみる．今度は，要素を後ろからではなく前から，すなわち鎖の左端から始めて考えていく：

$$R = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}}}$$

上式の最後の $\cdots$ を 1 で置き換えると，8 個の要素からなる鎖の等価抵抗が得られる．

S159　最初にオーム抵抗の格子を考え，以下のように議論を進める．まず，ある格子点から電流 I が入り，'無限遠' に向かって流れていくとする．図 S159.1 に示すように，対称性により，この点から四つの可能な方向に沿って，同じ大きさ $I/4$ の電流が流れ始める．

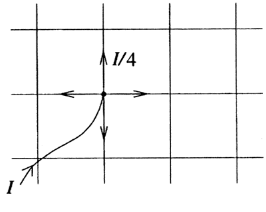


図 S159.1

次に，隣の格子点から（上の場合とは無関係に）電流 I が流れ出すとする．この場合にも，この格子点につながる四つの同等な抵抗に同じ大きさの電流 $I/4$

が流れる（図 S159.2 参照）.

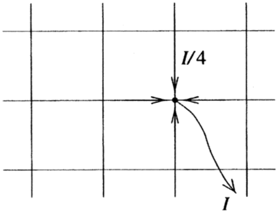


図 S159.2

ここで，上の二つの場合の重ね合わせを考える．回路の式の線形性により（たとえば電流や電位のような）スカラー量は単に加え合わさる．隣接する二つの格子点の間に，ある電圧（電位差）V が現れ，一方の格子点から電流 I が流れ込み，もう一方の格子点から電流 I が流れ出す．格子の他の場所を流れる電流は簡単には求まらないが，上の二つの隣り合う格子点の間を流れる電流は求めることができる．上で論じた二つの電流が加わるので，この抵抗には全電流 $I/2$ が流れる（図 S159.3 参照）.

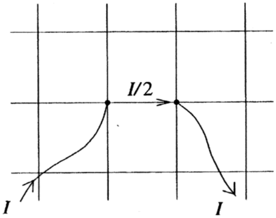


図 S159.3

ところが抵抗 R に電流 $I/2$ が流れるなら，その両端には電位差 $V = RI/2$ が現れる．それゆえ二つの隣り合う点の間の等価抵抗は $R_{\mathrm{e}} = V/I = R/2$ である.

コンデンサー，および自己インダクタンスをもつコイルの，無限に大きな格

子に対する等価値も同様に計算できる．結果は $C_e = 2C$ および $L_e = L/2$ である．

S160　多面体の格子点の数を c，一つの格子点で出会う辺の数を n とする．（たとえば12面体では $c = 20$，$n = 3$ である．）一つの格子点から1アンペアの電流が流れ込み，他のすべての格子点からは $1/(c-1)$ アンペアの電流が取り出されるとすれば，対称性から，流れ込む格子点につながる各辺には $I = 1/n$ アンペアが流れる．

次に，隣の格子点から1アンペアの電流が流れ出し，他のすべての格子点（最初の格子点を含む）に $1/(c-1)$ アンペアの電流が流れ込む電流分布を考え，これを前の電流分布に重ね合わせる．'直接の' 抵抗（すなわち二つの隣り合う格子点を直接結ぶ抵抗）を流れる電流 $I = 2/n$ アンペアにより，この抵抗の両端には電位差 $V = 2/n$ ボルトが現れる．回路全体を流れる電流は $I = 1 + 1/(c-1) = c/(c-1)$ アンペアだから，等価抵抗は

$$R_e = 2(c-1)/nc$$

である．この数字は12面体に対しては $19/30\ \Omega$，無限に大きい正方格子に対しては $1/2\ \Omega$ である．他の正多面体に対しても同様に計算できる．

訳注　正4面体や立方体の場合には，抵抗の並列および直列結合を用いて等価抵抗を導くこともできる．P164参照．

S161　元の格子（original grid）の等価抵抗を R_e^{orig}，抵抗を一つ取り外した後の格子（truncated grid）の等価抵抗を R_e^{trun} と記す．元の格子は，抵抗 R_e^{trun} と，取り去った抵抗 R を，並列に接続したものとみなせる．それゆえただちに，R_e^{trun} を含む式

$$R_e^{\text{orig}} = \frac{R \times R_e^{\text{trun}}}{R + R_e^{\text{trun}}} \qquad \text{すなわち} \qquad R_e^{\text{trun}} = \frac{R \times R_e^{\text{orig}}}{R - R_e^{\text{orig}}}$$

が書ける．

たとえば無限に大きな2次元正方格子の場合には，二つの格子点の間の等価抵抗は $R_e^{\text{orig}} = R/2$ で，これから切り取った回路の等価抵抗は $R_e^{\text{trun}} = R$ と得られる．

S162 流れ込む電流と流れ出る電流を分けて議論し，それをここでも，重ね合わせの‘トリック’を用いて結合する．電流 I_0 が流れ込む正方形の頂点を A，流れ出す隣の頂点を B とする．電位差 V は残りの二つの頂点（C と D）の間で測る（図 S162 参照）．

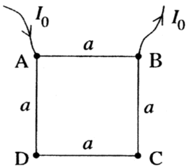


図 S162

電流 I_0 が点 A に流れ込み，電位ゼロの無限遠の方に流れていくならば，電流は物質を含む半空間の中で，（半）球対称に分布する．すなわち点 A から距離 r の所の電流密度 $j(r)$ は $j(r) = I_0/(2\pi r^2)$ である．この関係は，非常に小さい r に対しては，すなわち r が A の電極の大きさに近い所では，正しくない．

オームの法則の局所的な形は，電流密度 $\mathbf{j}$ を電場の強さ $\mathbf{E}$ とその場所の抵抗率 ρ で表す微分法則，すなわち $\mathbf{j}(r) = \mathbf{E}(r)/\rho$ である．

半空間中の電場の強さの大きさは，この関係を用いて

$$E(r) = \frac{I_0\rho}{2\pi r^2}$$

と決まる．電位関数（したがって電位差）は，電場の強さから積分で決まる．しかし今の場合には，簡単な類推が使える．点電荷 Q の電場は r^2 に逆比例し，その電位は r に逆比例して，比例定数は両方の場合で同じである（$E = kQ/r^2$ と $V = kQ/r$）．このことは，上で求めた電場の強さに対応する電位の場が $V = I_0\rho/(2\pi r)$ であることを意味する．

ある点が，電流が流れ込む電極に近いほど，その点の電位は高い．したがって点 D の電位 $V_{\mathrm{D}} = I_0\rho/(2\pi a)$ は点 C の電位 $V_{\mathrm{C}} = I_0\rho/(2\sqrt{2}\,\pi a)$ よりも高い．2 点の電位差は $I_0\rho\left(2-\sqrt{2}\right)/(4\pi a)$ である．

次に点 B からの電流 I_0 の流出を議論する．電流，電流密度，電場の強さ，そ

れと電位の符号が反転することを除けば，すべて前の場合と同じである．半空間中の電位は，点 B からの距離を r' として，関数 $V = -I_0\rho/(2\pi r')$ で表される．点 C の電位は点 D の電位よりも低い．2 点の電位差は前と同じである．

上の二つの場合を重ね合わせると，はじめの問題に戻る．点 C と D の電位差は，上の電位差の 2 倍，すなわち $V_0 = I_0\rho\left(2-\sqrt{2}\right)/(2\pi a)$ である．与えられたデータの他は，この表式は抵抗率 ρ だけを含む．したがって問題の解は

$$\rho = \left(2+\sqrt{2}\right)\pi a V_0/I_0$$

である．

注　この方法は，岩石の平均的抵抗率の測定などで，実用的に広く用いられる．測定はもちろん無限に広い半空間で行われるのではないが，ともかく，正方形の一辺 a よりはずっと大きな尺度の体積と面について行われる．

S163　図 S163.1 のように，まず電池を電流計を通して問題の抵抗の端子に接続し，次に電圧計を同じ端子に接続する．

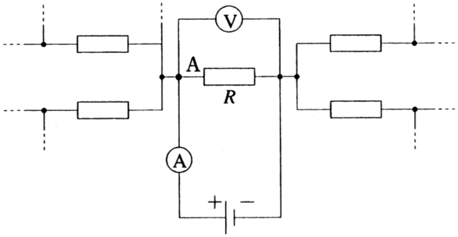


図 S163.1

電位差と電流の測定値の比が，求める抵抗値を与えると考えるのは単純すぎる．というのは，接点 A で，電流計から来た電流が全部抵抗 R に流れ，電流の一部が回路の他の部分に流れることはない，とはいえないからである．

この問題は，回路の短絡を用いれば容易に解決できる．抵抗のない導線を用いて，A と隣接するすべての接点を，電流計がつないであるのと同じ電池の端子に接続する（図 S163.2 (次ページ) 参照）．

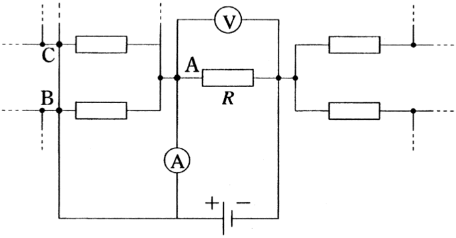


図 S163.2

電流計の内部抵抗は無視できるので，接点（B，C，D，…）と A は等電位で，その結果，これらの接点の間に電流は流れず，電流計からの電流は全部抵抗 R を通らねばならない．短絡の結果，電池から接点 B，C，D，… に向かう新たな電流が流れるかもしれないが，それはここの測定には影響を及ぼさない．

注　もし抵抗 R が他の抵抗と並列に接続されていると，これらの抵抗値を別々に測定する方法はない．それらの等価抵抗が見出せるだけである．

S164　立方体の一つの頂点から電流 I が流れ込み，反対側の頂点から流れ出すとする（図 S164.1 参照）．

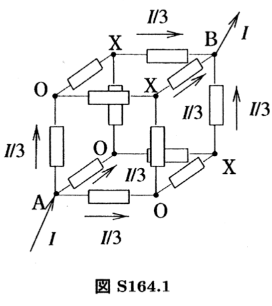


図 S164.1

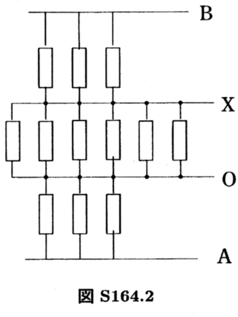


図 S164.2

対称性により，二つの頂点につながる 3 本ずつの抵抗には，電流 $I/3$ が流れるので，これらの抵抗の両端の電圧は等しい．それゆえ，図で O と記した点，および X と記した点は，それぞれ等電位である．すなわち，この 2 組の点をそ

れぞれ結んでも，系に影響は及ぼさない．

等電位の点どうしを結ぶと，回路は図 S164.2 のように描き直すことができ，等価抵抗は暗算で計算できる．すべての抵抗が抵抗値 1 Ω をもつと，等価抵抗は 5/6 Ω である．

1 次元の‘立方体’は単に 1 本の線分であり，その抵抗はそれ自身，すなわち 1Ω である．2 次元の‘立方体’は正方形である．一つの頂点から 2 本の抵抗が出て，相対する頂点に 2 本の抵抗が集まる．電流が正方形を通り抜けるときは，残りの二つの頂点は等電位である．したがって 2 本の並列の抵抗が 2 組，直列に結ばれるので，正方形の等価抵抗も 1 Ω である．3 次元の立方体では，前に見たように，相対する頂点から 3 本ずつの抵抗が出て，残りの 6 本の抵抗が二つの等電位面を結ぶ．

4 次元の‘立方体’は，3 次元の立方体を 4 次元目の方向に平行移動し，対応する点の間を結べば得られる．それゆえ 4 次元の‘立方体’の辺の数は，$12+12+8=32$ 本（両方の立方体の辺 12 本ずつと頂点間を結ぶ辺 8 本）である．この‘立方体’の様子は，図 S164.3 のように，平行移動を大きさの縮小で置き換えた，変形した射影でみることができる．図 S164.3 には，中心に関して対称の位置にある二つの頂点 A と B が示してある．

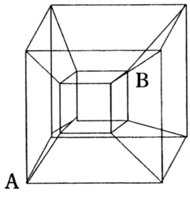


図 S164.3

4 次元の‘立方体’では，ある頂点から 4 本の線が出て，これらの線の端は等電位である．同じことは，反対側の頂点についても成り立つ．この二つの等電位面を結ぶ最短の道は，残りの 24 本の抵抗の中の任意の 2 本を通るものである．これは，24 本の抵抗の‘中間の’点も等電位であることを意味する．すなわち，並列につないだ抵抗 12 本が 2 組，直列に結ばれる．図 S164.4（次ページ）

は描き直した回路で，等価抵抗は $2/3\,\Omega$ である．

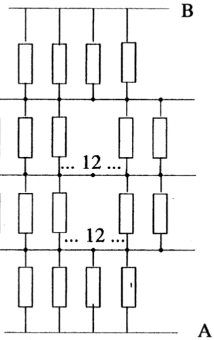


図 S164.4

注　問題を n 次元の‘立方体’に一般化するには，等電位の点を結んだ後，回路を同等な抵抗のいくつかの組に分解して，組の中で並列に結合した後，組を直列に結合する．一般に，$1\,\Omega$ の抵抗からつくった n 次元‘立方体’の，中心に関して対称の位置にある二つの頂点の間の等価抵抗を $R_n\,\Omega$ とすると，R_n は次式で与えられる：

$$R_n = \frac{1}{1\binom{n}{1}} + \frac{1}{2\binom{n}{2}} + \frac{1}{3\binom{n}{3}} + \cdots + \frac{1}{n\binom{n}{n}}$$

S165　電線を流れる電流を I，電線の断面積を A，二つの金属の抵抗率を ρ_1 および ρ_2 とする．長さ ℓ の電線に対するオームの法則は $V = I\rho\ell/A$ を与え，これから電線中の電場の強さ $E = V/\ell = \rho I/A$ がでる．

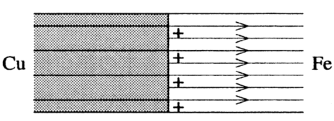


図 S165

銅の抵抗率は鉄の抵抗率よりも小さいので，電場の強さは，銅の中の方が鉄

の中よりも小さい．ガウスの法則によれば，電場の強さに差があれば，二つの金属の境界に電荷が蓄積する（図 S165 参照）．電荷の総量は

$$Q = \varepsilon_0 A \left(E_{\mathrm{Fe}} - E_{\mathrm{Cu}}\right) = \varepsilon_0 I \left(\rho_{\mathrm{Fe}} - \rho_{\mathrm{Cu}}\right)$$

である．この量が電流と物質定数だけに依存し，電線の断面積によらないことは興味深い．

知られているデータを代入すると，この電荷は $Q \approx 5 \times 10^{-21}\,\mathrm{C}$ となる．これは電気素量の $\frac{1}{50}$ にすぎない！　電線には測定可能な大きさの巨視的な電流が流れているのに，蓄積する電荷は微視的な電気素量のごく一部である．古典的電気力学の描像では，電荷は小さな球に荷われていると考えるが，上の奇妙な結果は，そのような描像が，電気現象を常に正しく表すとは限らないことを示す．量子力学と統計物理学のもっと高度な法則を適用して，はじめて正しい記述が得られるのである．

S166　ジェット機の速さは SI 単位では $200\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ である．

1)　磁場は鉛直下向きで，誘導される電圧は $80 \times 6 \times 10^{-5} \times 200 = 960\,\mathrm{mV}$ である．右翼の先端の方が電位が高い．

2)　運動は磁場と平行なので電位差はできない．

3)　双極子の場なので，赤道での磁場の強さは極での強さの半分である．磁場は水平なので，誘導電圧は $8 \times 3 \times 10^{-5} \times 200 = 48\,\mathrm{mV}$ で，機体の底の電位の方が高い．

4)　鉛直方向の磁場は $5 \times 10^{-5} \times \sin 66^\circ\,\mathrm{T}$，また，速度の北方向成分は $200/\sqrt{2}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ である．これから出る翼幅間の電位差は $520\,\mathrm{mV}$ で，右翼の端の電位の方が高い．また機体の上部（電位が高い）と下部の間に $23\,\mathrm{mV}$ の電位差が現れる．

S167　傾いた面に沿って棒が速度 v，加速度 a で動き，棒に電流 I が流れるとする．磁場がレンツの法則に従って棒にブレーキをかける．棒の運動方程式は

$$ma = mg \sin\alpha - B\ell I$$

である．三つの場合で上の式は共通で，差は，誘導電圧と棒を流れる電流の関係の差から来る．

1)　回路を閉じるのがオーム抵抗 R の場合には，電流 I と誘導電圧 $V = B\ell v$ は関係 $I = V/R = B\ell v/R$ で結ばれる．すぐにわかるように，ブレーキの力は速さに比例して増し，その結果棒の加速度は減少していき，最終的には棒は一定の速さで動くようになる．この最終で最高の速さ $v_{\max}$ は，運動方程式で $a = 0$ とおいて

$$v_{\max} = \frac{mgR\sin\alpha}{B^2\ell^2}$$

と得られる．

2)　回路を閉じるのが容量 C のコンデンサーの場合には，誘導電圧と電流の関係は上とは異なる．コンデンサーに帯電する電荷は誘導電圧から決まり，

$$Q = CV = CB\ell v$$

で与えられる．棒を流れる電流はこれの時間微分であることに注意すれば

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = CB\ell\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = CB\ell a$$

と得られる．すなわち棒を流れる電流は，棒の加速度に比例する．電流のこの表式を運動方程式に代入すれば，棒はレールの上を一定加速度

$$a = \frac{mg\sin\alpha}{m + B^2\ell^2C}$$

で動くことがわかる．電磁誘導は重力に基づく加速度を，棒の慣性質量が増えたのと同じ形で減少させる．棒の速さとコンデンサー上の電荷は，どちらも経過した時間に比例して増加する．

3)　回路を閉じるのがインダクタンス L のコイルの場合には，誘導電圧と電流の関係は

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = B\ell v = B\ell\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

である．運動のはじめには $I = 0$ かつ $x = 0$ なので，上式は電流が x 座標に比例すること，すなわち $LI = B\ell x$ を意味する．この関係を運動方程式に代入すれば，

$$ma = mg\sin\alpha - \frac{B^2\ell^2}{L}x$$

を得る．したがって棒に働く力は，一定の項と，変位に比例して変位と反対向きの項の和である．これは，ばねに物体を吊るして手を離したときの式と同じである．すなわち棒は，平衡の位置

$$x_0 = \frac{mgL\sin\alpha}{B^2\ell^2}$$

のまわりで調和振動をする．振動の振幅は $A = x_0$ で，棒の変位の時間による変化は，

$$\omega^2 = \frac{B^2\ell^2}{mL}$$

として

$$x(t) = A\,(1 - \cos\omega t)$$

である．

S168　1)　コンデンサーを接続した瞬間に，棒に電流 $I = V_0/R$ が流れ始め，棒は力 $F = B\ell I$ を受け，初期加速度 $a = B\ell V_0/mR$ をもつ．レンツの法則により，動く棒に誘導される電圧は，棒を流れる電流を減らす方向に働く．コンデンサー上の電荷は減少していき，したがってコンデンサーの電圧も減少する．一方，棒に誘導される電圧は増大していき，最後に両方の電圧が相殺するに至る．そこで棒の速度は

$$B\ell v_{\max} = \frac{Q_{\min}}{C} \tag{1}$$

で与えられる最大値に達する．一方，棒の運動方程式

$$m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = ma = B\ell I = -B\ell\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

で，上のように加速度と電流を，それぞれ速度と電荷の変化率で表すと，この二つの変化率の比例関係が，すべての時刻で成り立つことがわかる．棒の速さはゼロから $v_{\max}$ まで増加し，一方コンデンサー上の電荷は $Q_0 = CV_0$ から $Q_{\min}$ まで減少するので，式（2）は

$$mv_{\max} = B\ell\,(Q_0 - Q_{\min})$$

と書き表すことができる．最終速度とコンデンサー上に残る電荷は，式 (1) と (2) を用いて

$$v_{\max} = \frac{B\ell C V_0}{m + B^2\ell^2 C} \qquad \text{および} \qquad Q_{\min} = \frac{B^2\ell^2 C^2 V_0}{m + B^2\ell^2 C}$$

と計算できる．

2) 上の式からわかるように，棒の最大速度はコンデンサーの最初の電圧 V_0 に比例する．したがって（与えられた C と m の値に対し）棒の最終運動エネルギーは，V_0^2 に，すなわち系の最初のエネルギーに比例する．比例定数は，この装置（これを電磁銃とみる）の効率 η と考えることができ，

$$\eta = \frac{\frac{1}{2}mv_{\max}^2}{\frac{1}{2}CV_0^2} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{m}}{B\ell\sqrt{C}} + \frac{B\ell\sqrt{C}}{\sqrt{m}}\right)^2}$$

という形に書ける．括弧の中の二つの項の積は 1 で，算術平均と幾何平均の不等式から，2 項の和は最小で 2 であることがわかる．したがって，この電磁銃の効率は 25%を超えることができない．

注 最大効率に対する条件 $m = CB^2\ell^2$ をコンデンサー上の最終電荷の表式に代入すると，$Q_{\min} = V_0C/2$ であることがわかる．すなわちコンデンサー上の最初の電荷の半分だけが残っている．それゆえ，コンデンサー上の最初のエネルギーの 1/4 だけが残る．最初のエネルギーの 1/4 は棒の運動エネルギーに変換され，残りの半分はジュール熱として棒で失われた．

S169 1) 磁気エネルギー ($E_{\mathrm{magn}} = LI^2/2$) の増加率は，電池の出力と，抵抗で単位時間に散逸するエネルギーの差である：

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{magn}}}{\mathrm{d}t} = VI - RI^2 = -R\left(I - \frac{V}{2R}\right)^2 + \frac{V^2}{4R} \le \frac{V^2}{4R}$$

明らかに，増加率は $I = V/2R$ で最大になる．

2) スイッチを閉じた後の，回路のキルヒホッフの法則は

$$V = IR + L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

と書ける．これから，電流と時間の関係は

$$I = \frac{V}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-(R/L)\,t}\right)$$

と得られる（図 S169.1 参照）．

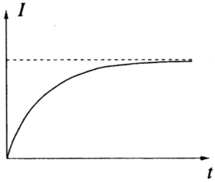


図 S169.1

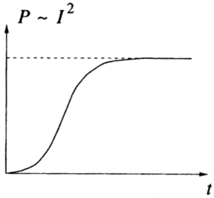


図 S169.2

抵抗で散逸するジュール熱は

$$P = RI^2 = \frac{V^2}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-(R/L)\,t}\right)^2$$

である．

図 S169.2 は，ジュール熱と時間の関係の大まかな図で，ジュール熱が単調に増加することを示している．ジュール熱の変化率ははじめは増加して最大に達し，その後は図 S169.3 に示すように単調に減少してゼロになる．

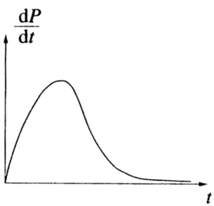


図 S169.3

エネルギーの変化率がもっとも速くなるのは，コイルと抵抗のどちらに対しても，I^2 がもっとも速く変化しているときである．上の 1) で，これが $I = V/2R$ で起こることがわかっている．この I の値を上の I の表式に代入すれば，これ

が $e^{-Rt/L} = \frac{1}{2}$ で起こることがわかる．それゆえ $t = (L/R)\ln 2 \approx 0.69\,(L/R)$ である．

注　1)　単位時間に失われる電池のエネルギーは VI だから，これは単調に増加している電流に比例する．

2)　電流がもっとも速く増加するのは $t = 0$ においてであるが，I^2（これはコイルの磁気エネルギーに比例する）の増加がもっとも速くなるのはもっと後である．

3)　コイルをコンデンサーに変えて，上の二つの問題を解くのも面白いだろう．

S170　1)　これらの回路の解析は，微分方程式を用いると厄介だが，複素インピーダンスを使えば容易である．インダクタンス L のコイルのインピーダンスは $i\omega L$，容量 C のコンデンサーのインピーダンスは $1/i\omega C$ である．ここで i は -1 の平方根，すなわち $i^2 = -1$ である．インピーダンスの結合は，抵抗 R_1 と R_2 の直列結合（$R = R_1 + R_2$）および並列結合（$R = R_1 R_2/(R_1 + R_2)$）と同じ規則に従う．

こうして回路 (a) の全インピーダンスは

$$Z = \frac{i\omega L \times i\omega L}{i\omega L + i\omega L} + \frac{(1/i\omega C) \times (1/i\omega C)}{(1/i\omega C) + (1/i\omega C)} = \frac{i\omega L}{2} + \frac{1}{2\,i\omega C} = \frac{1 - \omega^2 LC}{2\,i\omega C}$$

となる．それゆえ電源から流れる電流の大きさは，LC を ω_0^{-2}，ω/ω_0 を x と書くとき，

$$|I| = \frac{|V_0|}{|Z|} = \frac{V_0|2i\omega C|}{|1 - \omega^2 LC|} = CV_0\omega_0\,\frac{2\,x}{|1 - x^2|}$$

となる．これを図 S170.1 (a) に描いてある．理論的には，ω が ω_0 に近づくとき電流が無限に増加するようにみえる．実際には，電源はそんな電流を供給できるはずはない．現実のコイルおよび接続部分の抵抗はゼロでないので，それを入れて図 S170.1 (a) の山を計算すると，有限の高さになる．

同様に回路 (b) のインピーダンスは

$$Z = \frac{i\omega L \times (1/i\omega C)}{i\omega L + (1/i\omega C)} + \frac{i\omega L \times (1/i\omega C)}{i\omega L + (1/i\omega C)}$$

で，これから

$$|Z| = \frac{2\omega L}{|1 - \omega^2 LC|} \qquad \text{および} \qquad |I| = \frac{CV_0\omega_0|1 - x^2|}{2x}$$

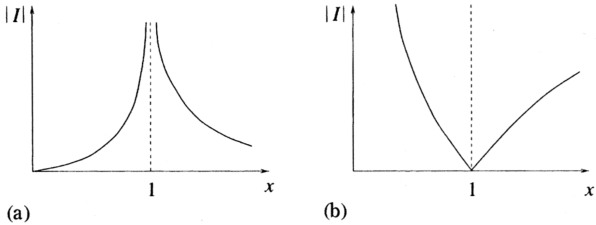


図 S170.1

が導かれる．これは図 S170.1 (b) に描いてある．$\omega = \omega_0$ では回路が無限大のインピーダンスをもつので，電流が流れないことがわかる．図 S170.1 (a) と (b) の x 依存性が逆数の関係にあるのも興味深い．

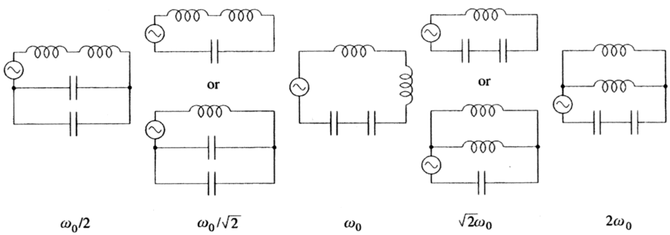


図 S170.2

2)　同一の部品からを直列あるいは並列でつくったインダクタンス L, $2L$, $L/2$ および容量 C, $2C$, $C/2$ を，共鳴振動数 ω_0, $\omega_0/2$, $2\omega_0$, $\omega_0/\sqrt{2}$, $\sqrt{2}\,\omega_0$ をもつ回路をつくるのに用いる．図 S170.2 に示すように，この中の二つには，二つの代替案がある．

S171　スイッチを閉じると，電流は図 S171.1（次ページ）に示すように回路を流れる．

スイッチを開いた直後は，どちらのコイルを流れる電流も実際上は変わらない．もし変わるとすると，磁束に急激な変化が生じ，それがコイルに非常に高い電圧を引き起こすからである．したがってコイルには電流 $2I$ と I が流れ続

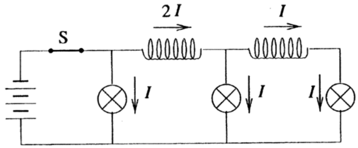


図 S171.1

け，それが電球を流れる電流を図 S171.2（次ページ）のように決める．

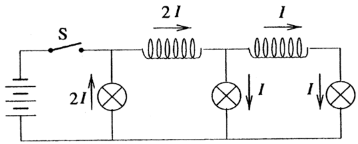


図 S171.2

その結果，スイッチに一番近い電流は突然明るくなるが，他の二つの電球の明るさは変わらない．これは非常に短い時間内のことで，その後はどの電球も暗くなって消える．

S172　巻き線が満たすべき空間の断面積は一定で，一方，巻線の断面積は d^2 のように変化する．それゆえ $n \propto d^{-2}$ である．一巻きの巻線の抵抗は電線の断面積に反比例する，すなわち d^{-2} のように変わるので，ソレノイドの単位長さあたりの抵抗は $R \propto nd^{-2} \propto d^{-4}$ である．磁束密度は $B \propto nI$ だから，必要な電流は $I \propto n^{-1} \propto d^2$ である．単位長さあたりで発生する熱は RI^2 で，これは $\propto d^{-4}(d^2)^2$，すなわち d にはよらない．こうして発熱効果に関する限りでは，電線の直径を（ある限界内で）どう選んでもかまわない．

S173　（円柱内部で）自由電子を円軌道上で運動させる力を決める式は

$$eE \pm er\omega B = mr\omega^2$$

である．ここで e は電子の電荷，m は質量，r は回転軸からの距離，E は電荷分布が円柱内部につくる静電場の強さである．± の符号は，ローレンツ磁気力

の向きが，円柱の回転の向きによって，外向き，内向きのどちらもあり得ることを示す．この運動方程式を書き換えれば，電場

$$E = \left(\frac{m\omega^2}{e} \pm \omega B \right) r \equiv Kr$$

が半径に比例することがわかる．

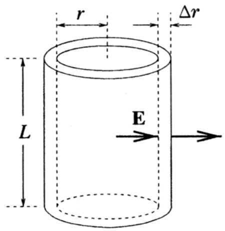


図 S173

ガウスの法則を用いれば，円柱内部の電荷密度を求めることができる．図 S173 に示す肉薄の円筒を考え，軸からの距離が r の点の電荷密度を $\rho(r)$ で表す．円筒に入る電束は $2\pi rLE(r)$，円筒から出る電束は $2\pi(r+\Delta r)LE(r+\Delta r)$ であるから，ガウスの法則により

$$K(r+\Delta r)\,2\pi\,(r+\Delta r)\,L - Kr2\pi rL = (1/\varepsilon_0)\,\rho 2\pi r\Delta rL$$

が成り立ち，これから円柱内の電荷密度として

$$\rho = \frac{2\varepsilon_0\omega m}{e}\left(\omega \pm \frac{eB}{m}\right)$$

を得る．電荷密度が r によらないことに注意．

この電荷密度は，磁場と角速度の向きと大きさによって，正，負，ゼロのいずれにもなり得る．ゼロになるのは $\omega = |e|B/m$ のときである．この場合に円柱内部の正負の電荷が分離しないのは，ローレンツ力によって得られる向心力が，ちょうど円運動を保つだけの大きさをもつからである．

注　問題に含まれる数値の大きさの程度をみるために，磁場を赤道付近の地球磁場と同程度，すなわち $B = 3\times10^{-5}\,\mathrm{T}$ と置いてみる．電荷密度がゼロになるのは角速度

が $\omega = eB/m = 5.3 \times 10^6\,\mathrm{s}^{-1}$ のときで，これは毎分 5 千万回転以上に当たる．こんな高速の回転は，どんな物質も耐えられず，実現はできない．

S174　任意の点の電荷分布は，回転系 K' でも実験室系（慣性系）K でも同じである．というのは，電荷密度は単位体積中の電子の個数に比例し，明らかに，個数と体積のどちらも不変だからである．したがって回転系でも電荷密度は一様で

$$\rho' = \rho = 2\varepsilon_0 \left(\pm B\omega + \frac{m\omega^2}{e} \right) \approx \pm 2\varepsilon_0 B\omega$$

である．荷電粒子に働く力 $\mathbf{F}$ はどちらの座標系でも同じはずである（それは，力を測るばねの伸びは座標系によらないことからわかる）．すなわち $\mathbf{F}' = \mathbf{F}$．

円柱といっしょに回転している座標系では，金属の自由電子は静止しているので，電子に働く合力はゼロでなければならない（さもないと電子は動くことになる）．それゆえ，遠心力を無視すれば，電場もゼロでなければならない（$\mathbf{E}' = 0$）．さらに

$$Q\,(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \mathbf{F} = \mathbf{F}' = Q\,(\mathbf{E}' + (\mathbf{v} + \mathbf{v}_{\mathrm{rel}}) \times \mathbf{B}')$$

ここで $\mathbf{v}_{\mathrm{rel}}$ は二つの系の相対速度で，これは円柱の各点ごとに異なる．$E = \omega B r$ を思い出し，$\mathbf{v}_{\mathrm{rel}} \times \mathbf{B}'$ は大きさは $\omega B' r$ で動径方向を向くことに注意すると，両方の系で磁場は（ベクトルとして）等しい，すなわち $\mathbf{B}' = \mathbf{B}$ ということが結論できる．こうして，回転座標系では，電荷はそれに伴う電場なしで存在し得ることになる（図 S174.1 参照）．

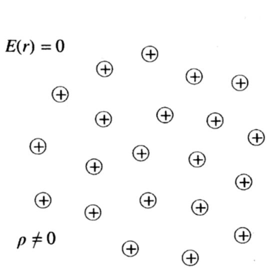


図 S174.1

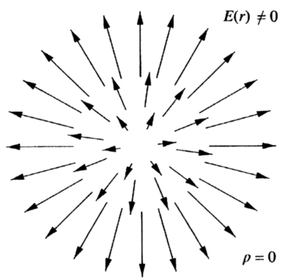


図 S174.2

同様にして，次のことを示すこともできる：一様な磁場の中で回転している観測者の座標系では，電荷がなくても一様でない電場が存在し得る（図 S174.2 参照）．

すなわち回転座標系では，ガウスの法則（電束とそのもとの電荷のつながり）は成り立たない．この驚くべき結果は，低速の（非相対論的な）運動に対してもあてはまる．

S175　これを 1 次元の問題と考えるのは誤りである．誘導される電場の大きさについてのジャックの計算（$E(r) = rB\omega$）は正しいが，回転しているスポークの中の電場ベクトルは，スポークと平行ではなく，図 S175.1 に示すように動径方向を向く．そのため，円柱棒（スポーク）の側面でも，電束はゼロではない．円柱の側面から出る全電束は，外側の底面から出る電束に等しい．電束の半分が円柱の側面から出て行くというのは，多分意外な事実だろう．

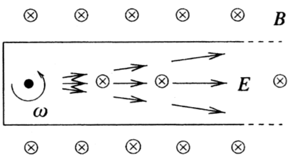


図 S175.1

正しい結果はガウスの法則を用いて計算できる．適用するガウス面を図 S175.2（次ページ）に示す．面から外へ出る電束は

$$\Psi = E\,(r+\Delta r)\,h\,(r+\Delta r)\,\theta - E(r)\,hr\theta = B\omega h\theta\,((r+\Delta r)^2 - r^2) \approx 2Bh\omega\theta r\Delta r$$

である．

これを

$$\Psi = \frac{1}{\varepsilon_0}\,\rho\Delta V = \frac{\rho hr\theta\Delta r}{\varepsilon_0}$$

によって電荷密度と結びつける．結果の ρ の値はジルのものと同じである．

注　電荷密度の符号は，回転および磁場の向きによって，正にも負にもなる．スポーク内部の電荷分布は一様だが，スポークの表面に反対符号の電荷が分布するので，ス

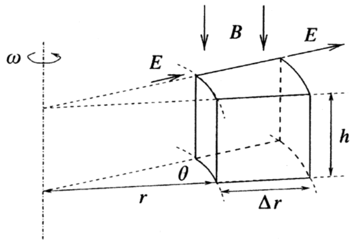


図 S175.2

ポークの全電荷はゼロである．表面の分布は複雑で，初等的な方法で見出すことはできない．

S176 地球磁場を水平と鉛直の成分に分ける．鉛直成分は，輪を貫く磁束が常にゼロだから，輪に電流を誘導しない．磁場の水平成分を $\mathbf{B}$ とし，輪の角速度を ω とする．輪を貫く磁束は

$$\Phi = \pi r^2 B \cos\omega t$$

で，誘導電圧は $V = -(\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t) = \pi r^2 \sin\omega t$ である．輪に流れる電流

$$I = \frac{V}{R} = \frac{r^2\pi B\omega}{2R}\sin\omega t$$

は，輪の中心に大きさ

$$B_I = \mu_0\frac{I}{2R} = \mu_0\frac{\pi r B\omega}{2R}\sin\omega t$$

の磁場を誘導する．

磁場 $\mathbf{B}_I$ の方向は輪の面と垂直で，輪とともに回転する．ベクトル $\mathbf{B}_I$ を $\mathbf{B}$ と平行な成分と垂直な成分に分ける．平行な成分は $\cos\omega t \times \sin\omega t = \frac{1}{2}\sin 2\omega t$ に比例し，時間平均はゼロになる．垂直な成分は

$$B_\perp = \mu_0\frac{\pi r B\omega}{2R}\sin^2\omega t = \mu_0\frac{\pi r B\omega}{4R}(1-\cos 2\omega t)$$

と書ける．この表式は，比較的急速に時間変化して平均すればゼロになる項と，時間変化しない項からなる．後者によって，磁針は元の南北方向から $\alpha = 2°$ だ

け偏る．磁針は（平均の）合成磁場の方向を向くので，

$$\tan\alpha = \frac{B_\perp}{B} = \mu_0 \frac{\pi r\omega}{4R}$$

である．磁針はこの位置のまわりで微小振動をする．この振動の振幅は，磁針の力学的および磁気的性質と，減衰力によって決まる．

磁針の偏りの角度が，地球磁場の大きさに依存しないことは興味深い．重要なのは地球磁場の水平成分がゼロでないことだけである．輪の抵抗を上の式から計算すると $1.78 \times 10^{-4}\,\Omega$ となる．

S177　I と i をヒントのように定義すると，求める電圧計の読みは RI である．どちらの場合にも，キルヒホッフの法則から

$$RI + \frac{\theta}{2\pi} r(I+i) = \frac{1}{2} a^2 \dot{B} \lambda$$
$$ri + \frac{\theta}{2\pi} rI = \pi a^2 \dot{B}$$

の形の式が出る．(a) の場合には $\lambda = \theta$ で，連立方程式の解から $I = 0$，したがって電圧計の読みはゼロである．

(b) の場合には $\lambda = \theta - \sin\theta$ で，簡単だが少し長い計算で，電圧計の読みが

$$|V| = \frac{2\pi^2 R a^2 \dot{B} \sin\theta}{4\pi^2 R + r\theta\,(2\pi - \theta)}$$

であることが示される．

S178　半径 $R = L/2\pi$ の二つの円板が，図 S178.1 のように接触しているとする．

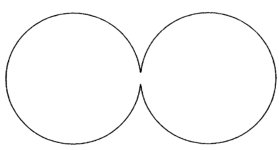


図 S178.1

一定の割合で強さが時間変化している一様な磁場と垂直になるように，円板を置く．そのふちに沿って巻いてある電線に誘導される電圧は

$$V = 2\pi R^2 \frac{\Delta B}{\Delta t}$$

である．

ここで右の円板を（図 178.2 (a)），対称軸のまわりに 180° ねじると，円板の上側（黒い側）が下側になる（図 178.2 (b)）．今度は軸 t のまわりにふたたび 180° 回転する（図 178.2 (c)）．この結果両方の円板の黒い側が上側になって重なり，そのふちは問題で説明したメビウスの帯と全く同じである．

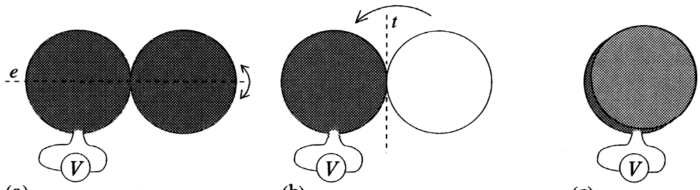


図 S178.2

こうして，一定の割合で時間変化している磁場の中に，メビウスの帯を置くときの電圧計の読みは

$$V = 2\pi R^2 \frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{kL^2}{2\pi}$$

であることがわかる．この値は，最初の紙の帯の面積から単純に予想する値よりもずっと大きい．メビウスの帯が張る（一つの側しかない）面の面積は，紙の帯の面積では<u>ない</u>．とくに紙の帯の幅が狭いときには，それよりはるかに大きい．

この誘導電圧は，電線を‘ねじれ’の所で切って，二つの一巻きずつの‘コイル’に分け，両方に誘導される電圧の（向きを考慮に入れた）代数和として計算することもできる．今の場合には二つの巻線の向きは同じだから，一つの巻線に誘導される電圧 $V_0 = k\pi R^2$ の 2 倍として全誘導電圧が $V = 2V_0$ と得られる．

S179　時刻 t における外側のコイルの電流は $I = kt$ で，内側のコイルの電流は $2I = 2kt$ である（k は定数）．これらの電流がつくる磁場は，n を単位長さあたりの巻き数として，外側のコイルの内部では $B = \mu_0 nkt$，内側のコイルの内部では $3B$ である．粒子の半径 r の軌道が囲む磁束は

$$\Phi = \pi R^2 \times 2B + \pi r^2 \times B = (2R^2 + r^2)\,\pi\mu_0 nkt$$

である．誘導電場 E の大きさは，磁束の時間変化率から

$$E \times 2\pi r = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = (2R^2 + r^2)\,\pi\mu_0 nk$$

すなわち一定値

$$E = \frac{(2R^2 + r^2)}{r}\frac{\mu_0 nk}{2}$$

をもつことがわかる．

荷電粒子は磁場によって円軌道に保たれているので，粒子に働く力の動径方向の成分がゼロの条件から

$$\frac{mv^2}{r} = qvB \tag{1}$$

を得る．粒子は円軌道に沿って，力の接線成分により $ma_{\mathrm{t}} = qE$ に従って加速される．ここで m は粒子の質量，q は電荷である．

電場の大きさは一定なので，粒子の速さは時間とともに一定の割合で

$$v = a_{\mathrm{t}}t = \frac{qE}{m}t = \frac{(2R^2 + r^2)}{r}\frac{\mu_0 nk}{2}\frac{q}{m}t$$

のように増加する．この式と B の値を式（1）に代入すると，

$$\frac{m}{r}\frac{(2R^2 + r^2)}{r}\frac{\mu_0 nk}{2}\frac{q}{m}t = q\mu_0 nkt$$

が得られる．これは

$$\frac{(2R^2 + r^2)}{2r^2} = 1 \qquad \text{すなわち} \qquad r = \sqrt{2}\,R$$

なら満たされる．

訳注 1) ある時刻に，粒子の中心軸からの距離 r が $\sqrt{2}\,R$ から少しずれていると，その後の軌道はどうなるだろうか．円軌道の半径は

$$r = \frac{mv}{qB}$$

から決まる．時間とともに B が増すと，誘導電場を通して v も増し，一般には r は時間変化する．その時間変化率は，B の時間変化率を $\dot{B}$ とするとき

$$\dot{r} = \frac{2R^2 - r^2}{2r}\,\frac{\dot{B}}{B}$$

であることが容易に計算できる．したがって，$r > \sqrt{2}\,R$ ならば $\dot{r} < 0$，$r < \sqrt{2}\,R$ ならば $\dot{r} > 0$ である．すなわち r が $\sqrt{2}\,R$ からずれても，時間がたてば $\sqrt{2}\,R$ に戻る．言い換えれば $r = \sqrt{2}\,R$ の円軌道は安定である．もしこの安定性がなければ，粒子が円軌道上を動くといっても，物理的には無意味であろう．なお，安定軌道が存在するためには，内側のコイルがあること，すなわち磁束に r によらない部分があることが本質的である．一様な磁場だけでは，軌道は時間がたてばつぶれてしまう．

2) 上の議論からもわかるように，B が時間に比例することは本質的ではない．二つの領域の磁場が比例して，両者が時間とともに増大すれば十分である．

3) 磁束の時間変化にともなう誘導電場によって電子を加速する装置を，ベータトロンという．この問題はベータトロンのモデルである．

S180 時間変化する磁場は電場をともなう．輪を長さ Δs の小さな部分に分けて考え，誘導される電場の接線方向成分を E_{t} で表す．（一般には E_{t} は場所によって異なる．）輪の半径を r とすれば，輪の微小部分の電荷は

$$\Delta Q = Q\,\frac{\Delta s}{2\pi r}$$

で，それに働く力

$$\Delta F_{\mathrm{t}} = \Delta Q\,E_{\mathrm{t}}$$

は，輪にトルク

$$\Delta\tau = r\,\Delta F_{\mathrm{t}}$$

を及ぼす．したがって輪が受ける全トルクは

$$\tau = \sum\Delta\tau = \sum rQ\,\frac{\Delta s}{2\pi r}\,E_{\mathrm{t}} = \frac{Q}{2\pi}\sum E_{\mathrm{t}}\,\Delta s$$

である．この $\sum E_{\mathrm{t}}\,\Delta s$ は輪に沿う誘導起電力にほかならず，それは磁束の時間変化率に比例するので

$$\sum E_{\mathrm{t}}\,\Delta s = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\pi r^2\,\frac{\Delta B}{\Delta t}$$

となる．

トルクを受けて，輪は（輪の慣性モーメントは $I = mr^2$）角加速度 α でまわりだす．時間間隔 Δt の間の角速度の変化は

$$\Delta\omega = \alpha\,\Delta t = \frac{\tau}{I}\,\Delta t = \frac{Q}{2\pi}\left(-\pi r^2\,\frac{\Delta B}{\Delta t}\right)\frac{1}{mr^2}\,\Delta t = -\frac{Q}{2m}\,\Delta B$$

で与えられる．磁場の強さはゼロから B まで増すので，輪の最終角速度は

$$\omega = -\frac{QB}{2m}$$

になる．

注　1)　上式の負の符号は，角速度ベクトルの方向が（Q が正の場合には）磁気誘導ベクトルと反対向きであることを意味する．

2)　最終角速度が，輪の半径，磁束が変化する時間，あるいは磁束が時間変化する仕方などに依存しないことは興味深い．

3)　上の計算では，回転する輪が作る磁場は無視した．

4)　軸対称な一様磁場の場合を除けば，（輪の内部での）誘導電場の実際の形を知ることはできない．というのは，磁場の幾何学的な形も，磁場の中のどの位置に輪を置いたかということも，与えられていないからである．全誘導起電力は決まるが，誘導電場自体は決まらない．

S181　全磁場 B' は地球磁場 B_0 とコイルの磁場 B の和

$$B' = B_0 \pm B \tag{1}$$

である．コイルを流れる電流は，誘導電圧 V_{i} と抵抗 R から

$$I = \frac{V_{\mathrm{i}}}{R} = B'\,\frac{r^2\omega}{2}\,\frac{1}{R} \tag{2}$$

と決まる．ここで誘導電圧は，円板の半径が単位時間に切る磁束から計算した．コイル自身がつくる磁場は

$$B = \mu_0 n I \tag{3}$$

である．

上の 3 式から，B，B'，I が容易に決まる．式 (1) の中の二つの符号は，角速度が正負の値をもつことを考慮したものである．ω の値は，コイルの磁場が地球磁場と同じ向きをもつときに正にとる．全磁場と電流に対する結果は

$$B' = \frac{2RB_0}{2R - \mu_0 n r^2 \omega} \qquad \text{および} \qquad I = \frac{B_0 r^2 \omega}{2R - \mu_0 n r^2 \omega}$$

である．当然，円板が静止しているときには，電流はゼロで，コイル中の全磁場は，単に地球磁場 B_0 である．

円板の回転の向きが，コイルの磁場を外部磁場（地球磁場）と反対向きにする場合には ($\omega < 0$)，円板の（負の）角速度が増大するにつれて，全磁場は漸近的にゼロに減少する．そのような高速回転では，コイルに流れる電流は $-B_0/\mu_0 n$（地球磁場を打ち消すのに必要な値）に近づく．

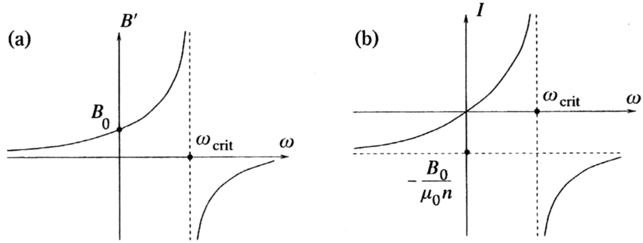


図 S181.1

円板が上とは反対の向きに回転するときには ($\omega > 0$)，全磁場は増加する．これが誘導電圧の増加を導き，流れる電流が増す．それによって磁場がさらに増加する．この正のフィードバックの条件の下では，角速度が臨界値 $\omega_{\mathrm{crit}} = 2R/(\mu_0 n r^2)$ に近づくと，磁場と電流はどちらも無限大に近づく（図 S181.1 参

照）．明らかに，こんな状態は実際には起こらない．角速度が上がりすぎると，電流が増すに従ってコイルで発生する熱も増し，遂には電線が焼き切れてしまう！

系のこの奇妙なふるまいは，コイルの電流と全磁場の関係を，図 S181.2 のようにグラフで表すとさらに理解しやすくなる．式（2）によれば I は B' に比例し，その比例定数は ω に依存ずる．

この比例関係は，原点を通り勾配が ω に比例する直線で表される．一方，式（1）と（3）からでる $B' = B_0 + \mu_0 nI$ は，原点を通らない直線である．その勾配は $1/(\mu_0 n)$ で ω にはよらない．この 2 本の直線の交点が電流と全磁場の実際の値を決める．$\omega = \omega_{\rm crit}$ の場合には 2 本の直線の勾配が等しく，方程式は解をもたない．現実にはこの臨界角速度は高すぎて，それに対応する状態には近づくこともできない．

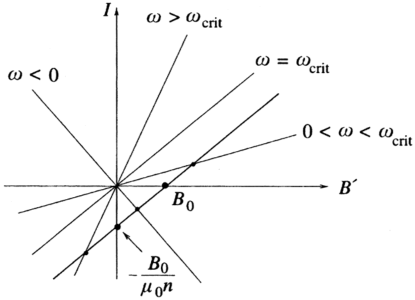


図 S181.2

コイルで生じるジュール熱は，円板を回転させるための力学的な仕事に等しくなければならない．電気的な出力は $P_{\rm el} = I^2R$ で，一方 1 秒間になされる力学的な仕事は，トルクと角速度の積，すなわち $P_{\rm mech} = M\omega = B'Ir^2\omega/2$ である．（トルク M は力 $B'Ir$ と，作用線と軸の平均距離 $r/2$ の積として計算した.）B' と I の関係を用いれば，$P_{\rm el} = P_{\rm mech}$ を直接確かめることができる．

この問題で説明した風変わりな装置は，単極発電機（unipolar dynamo）と呼ばれている．

S182 輪の任意の位置で輪を貫く全磁束は，外部磁場の磁束と自己インダクタンスからなる：

$$\Phi = B_z \pi r_0^2 + LI$$

磁束の変化は輪に

$$RI = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

に従う電流を誘導する．しかし，超伝導の輪のオーム抵抗はゼロだから，上式はゼロでなければならない．したがって，輪を貫く磁束は一定でなければならない：

$$\Phi = B_0 (1 - \alpha z) \pi r_0^2 + LI = 定数$$

初期条件（$z = 0$，$I = 0$）から定数の値は $\Phi = B_0 \pi r_0^2$ と定まる．

輪の電流は以上の式から

$$I = \frac{1}{L} B_0 \alpha \pi r_0^2 z$$

と決まる．輪に働くローレンツ力（装置の対称性により鉛直成分のみをもつ）は

$$F_z = -B_r I(z)\, 2\pi r_0 = -B_0 \beta r_0 \frac{1}{L} B_0 \alpha \pi r_0^2\, 2\pi r_0 z = -kz$$

と表せる．すなわちローレンツ力は輪の鉛直変位に比例し，比例定数は与えられたデータから計算できる．(この結果は微小変位に対してのみ正しい．というのは，大きな変位に対しては，与えられた式では磁束密度を十分に表せないからである.)

輪の運動方程式は

$$ma_z = F_z - mg = -kz - mg$$

である．これは輪が，静止の位置 $z_0 = -mg/k$ のまわりで調和振動

$$z(t) - z_0 = A \cos \omega t$$

をすることを意味する．ここで $\omega = \sqrt{k/m}$ である．初期条件から $A = -z_0$ だから，結局

$$z(t) = -\frac{g}{\omega^2} (1 - \cos \omega t)$$

を得る．鉛直方向の z 座標は正にはならない．ローレンツ力は常に上を向き，振動の最高点でゼロになる．輪の電流は常に同方向に流れる．

データの数値を代入すると，$\omega = 31.2\,\mathrm{s}^{-1}$，$A = 1\,\mathrm{cm}$ を得る．輪を流れる電流の時間変化は，$z(t)$ によって

$$I = \frac{1}{L}\,B_0\alpha\pi r_0^2 z(t) = -\frac{1}{L}\,B_0\alpha\pi r_0^2 A\,(1-\cos\omega t)$$

と表される．電流は，振動の最低点で，最大値 $I_{\max} = 39\,\mathrm{A}$ をとる．

S183　質量 m，電荷 Q の粒子に対して，エネルギー保存則を適用する：

$$\frac{1}{2}\,mv^2 + QK\,\frac{\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{2}\,mv_0^2 + QK\,\frac{\cos(\pi/2)}{r^2} = 0$$

これより，角 θ におけるビーズの速度は

$$v = \sqrt{-2\,\frac{QK}{mr^2}\,\cos\theta} \qquad \left(\tfrac{1}{2}\pi \le \theta \le \pi\right)$$

と表せる．

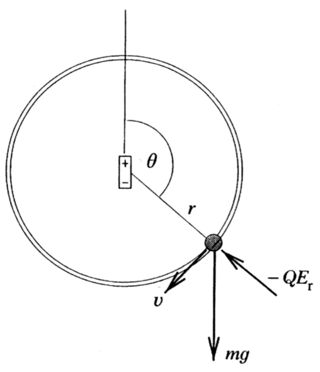


図 S183

円運動には，動径方向の力の成分 mv^2/r が必要である．双極子が単位電荷に及ぼす力の動径方向成分（すなわち電場の動径方向成分）は，ポテンシャルを

r で微分してマイナスをつければ得られる：

$$E_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 2\,\frac{K\cos\theta}{r^3}$$

前に求めた速度の表式から，QE_r は，必要な向心力 $-mv^2/r$ にちょうど等しいことがわかる．それゆえ輪は，ビーズに円運動をさせるために，何の力も及ぼす必要はない．輪がなくても，ビーズは円軌道上を動き続け，出発点と反対の点まで達するだろう．そこでビーズ球は止まり，元の軌道をたどって周期運動をする．

注 この運動の時間依存性は，90° まで持ち上げてから手を離した後の，重力の下での単振り子の運動の時間依存性と同じである．

S184 磁力線と垂直に一定速度 v で水平方向に動く座標系で見ると，電荷 q が静止しているとしよう．地上に固定された座標系では，速度 v で動く電荷には，大きさ qvB の力（向きは運動の向きにより上向きまたは下向き）が働くのが観測される．

動く座標系では電荷は静止しているので，ローレンツ力は働かない．それでも電荷はその力を‘感じる’．（何らかの相互作用に基づく力が働くという事実は，それを記述する座標系にはよらない．）この見かけ上の矛盾は，静止する座標系から動く座標系に移るときに，電場と磁場を変換させれば解決する．今の場合には，静止座標系では磁場だけがあって，電場はない．（光速よりずっとおそい速度で）動く座標系でも同じ磁場が観測されるが，そのほかに強さ $E = vB$ の電場も存在する．この電場が，行方不明であった力 $F = qE = qvB$ を与える．

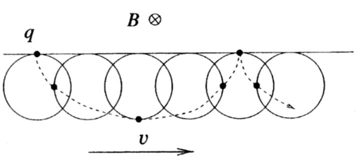


図 S184

動く座標系の速度を，上で述べた電気力が，問題の重力と同じ大きさになる

ように，すなわち

$$qvB = qE = F = mg$$

となるようにとる．

今見ている物体の運動を，この座標系で記述しよう．電場と重力場の働きは相殺している．この系では物体は（最初は）速度 $-v$ で動くので，$-qvB$ の力（ローレンツ磁気力）が物体に働く．これによって物体は，$qvB = mv^2/r$ に従い，円軌道に沿って下向きにまわり始める．r は円の半径で，$r = mv/qB$ で与えられる．速度と半径の値から，物体が軌道を一周する時間は $T = 2\pi m/qB$ で，速度 v にはよらない．

地上に固定した座標系では，この等速円運動に，等速直円運動が重なる．それゆえ粒子は，図 S184 に示すサイクロイドの道に沿って動く．$2r = 2mv/qB$ まで落ちるとふたたび上り始め，時間 T ではじめの高さに達する．その間の水平方向の変位は $Tv = 2\pi r$ である．この点で粒子は瞬間的に静止し，新しいサイクロイド曲線上を動き始める．

S185　磁石が一定の最終速度で距離 L（$L \gg h$）を落下するとき，ポテンシャルエネルギーの損失 mgL は，L/h 個の輪の中に誘導される電流の，ジュール熱に転化する．一つの輪の中でつくられる熱を Q で表せば，

$$mgL = \frac{L}{h}Q \qquad \text{すなわち} \qquad Q = mgh$$

と書くことができる．

Q はどのような量に依存するだろうか．電圧が与えられたとき，抵抗で散逸するジュール熱は抵抗に反比例する，すなわち $Q \propto R^{-1}$ だから，磁石が速度 v_0 で動いているときの熱関数は

$$Q = \frac{1}{R} f(v_0, \mu, r)$$

の形に表すことができる．すなわち Q は，最終速度 v_0，磁気モーメント μ，円輪の半径 r の一般の関数である．さらにこの式は，真空の透磁率 μ_0 も含むことができる．

ここで，個々の量の次元を考える．RQ の次元は

$$[RQ] = \mathrm{kg}^2 \cdot \mathrm{m}^4 \cdot \mathrm{s}^{-5} \cdot \mathrm{A}^{-2}$$

その他の量の次元は

$$[v_0] = \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}, \qquad [\mu] = \mathrm{A} \cdot \mathrm{m}^2, \qquad [r] = \mathrm{m}, \qquad [\mu_0] = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2} \cdot \mathrm{A}^{-2}$$

である．

それゆえ

$$RQ(v_0, \mu, r, \mu_0) \propto v_0 (\mu_0 \mu)^2 \, r^{-3}$$

でなければならない．ところが前に見たように $Q = mgh$ だから

$$v_0 \propto \frac{mghRr^3}{\mu^2}$$

となる．質問にある最終速度の倍率は，それぞれ 2，$\frac{1}{4}$，2，2，8 ということになる．

訳注　参考のため，直接解いた結果を付け加えておく．鉛直下向きに z 軸をとり，ある瞬間に磁石がいる位置を原点 O とする．位置 z にある輪を O からみる立体角を $\Omega(z)$ とすれば，この輪を貫く磁石の磁束は

$$\Phi(z) = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}z}$$

である．磁石が速度 v で落下していれば，磁束は $\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t = \mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}z \, v$ の割合で時間変化するので，輪には電流

$$I(z) = \frac{1}{R} \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}z} \, v = \frac{v}{R} \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{\mathrm{d}^2\Omega}{\mathrm{d}z^2}$$

が流れる．この電流が点 O につくる磁場（円電流が中心軸上につくる磁場）

$$B = -\frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}z}$$

は，磁石に

$$f(z) = \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}z} \, \mu = -\frac{\mu_0}{4\pi} I \mu \frac{\mathrm{d}^2\Omega}{\mathrm{d}z^2} = -\frac{v}{R} \left(\frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \right)^2 \left(\frac{\mathrm{d}^2\Omega}{\mathrm{d}z^2} \right)^2$$

というブレーキ力を及ぼす．以上は一つの輪の電流が及ぼす力で，全部の輪からの寄与は，管が無限に長いと近似すれば，

$$F = \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,\mathrm{d}z = -\frac{v}{R}\left(\frac{\mu_0\mu}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{d}^2\Omega}{\mathrm{d}z^2}\right)^2 \mathrm{d}z$$

と表される．O が輪を見る立体角 $\Omega(z)$ は，O と輪がつくる円錐の半頂角を θ とすれば $\Omega(z) = 2\pi(1-\cos\theta)$ だから，$\tan\theta = r/z$ に注意して，積分を θ についての積分に変換して実行すれば，結果は

$$F = -\frac{v}{R}\left(\frac{\mu_0\mu}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{hr^3}\frac{5\pi}{128}$$

となる．磁石の最終速度 v_0 は，条件 $mg + F = 0$ より

$$v_0 = \frac{128}{5\pi}\,mgRhr^3\left(\frac{\mu_0\mu}{4\pi}\right)^{-2}$$

と得られる．以上の計算と本文の次元解析を比べれば，次元解析の方法の有効性が納得できるだろう．

S186　磁場は動く電荷の速度の方向しか変えることができないので，真空容器に固定した座標系（S）では，電子の速さは一定に保たれる．この系に対して一定速度 v_0 で電線と平行に動く，第二の座標系（S'）を考える．電荷 Q をもつ粒子が受けるローレンツ力は，二つの系で

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F} = Q\,(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) = Q\,(\mathbf{v}'+\mathbf{v}_0)\times\mathbf{B} = Q\,(\mathbf{v}'\times\mathbf{B}') + Q\mathbf{E}'$$

と書くことができる．

まず電流は，どちらの座標系でも同じでなければならないことに注意する．系 S では電子が動き，正イオンは静止していて，電線自体は中性である．座標系 S' では，電子の速度が変わるので電子の電流も変わるが，正イオンが動くことによる電流が，この変化をちょうど打ち消す．その結果として，両方の系で磁場は同じである（$\mathbf{B}' = \mathbf{B}$）．上の式によれば，系 S' ではこの磁場のほかに，$\mathbf{v}_0\times\mathbf{B}$ で与えられる電場も存在する．（系 S に磁場だけがあるときには，動く系 S' の速さが光の速さよりずっと小さい限り，S から S' への変換で一般に磁場は変わらないことに注意する.）

ここで電子の運動を座標系 S' で記述しよう．この系では，電線に垂直で強さが

$$E(r) = v_0 B(r) = \frac{\mu_0 v_0 I}{2\pi}\frac{1}{r}$$

の電場が存在する（r は電線からの距離）．円筒コンデンサーとの類推を用いれば，この電場に対するポテンシャル関数（すなわち r で微分してマイナスをつければ電場を与える関数）が

$$U(r) = -\frac{\mu_0 v_0 I}{2\pi}\ln r$$

であることがわかる．

系 S' では，（電線から距離 r_0 離れた点での）電子の最初の速さは $\sqrt{2}\,v_0$ である．そして電線から距離 $r_0/2$ まで近づくと，電子はちょうど静止する．電子の運動に仕事とエネルギーの定理を適用すれば

$$\frac{1}{2}m\,(\sqrt{2}\,v_0)^2 = -\frac{\mu_0 v_0 IQ}{2\pi}(\ln\frac{r_0}{2} - \ln r_0) = \frac{\mu_0 v_0 IQ}{2\pi}\ln 2$$

を得る．この表式に数値を代入すれば，電子の初速度が

$$v_0 = \frac{\mu_0 Q}{2m\pi} I \times \ln 2 \approx 2.46 \times 10^5\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \approx 250\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$$

と得られる．

注 1) 電子のこの初速はマクロの尺度からみれば非常に大きいが，電子としては非常に小さい．電子は 0.2 V という小さな電位差で加速されるだけで，この速さを得る．$250\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$ は c よりはるかに小さいので，この問題で，電子の質量の相対論的増加を無視したことは正しかった．

2) 電子が電線に，$r_0/2$ より近づくことができないならば，電線から遠ざかる距離にも上限がある．すなわち $2r_0$ 以上離れることはできない．これは興味ある事実である．もっと一般的にいえば，最小距離が r_0/n ならば，最大距離は nr_0 でなければならない．このことは，もう一つ別の，速度 $-v_0$ で動く座標系を用いて証明することができる．

訳注 1) 最初に，運動の定性的な様子をみておくことが望ましい．電線を z 軸にとり，電流の方向を正の向きとする．電荷 Q の荷電粒子が x 軸上の $x = r_0$ の点から速度 $v_x = -v_0$ で動き出すとする．xz 面上では磁場は y 方向だから，粒子が xz 面内

にいる限り，ローレンツ力は xz 面内を向く．こうして粒子は xz 面内の軌道に沿って，一定の速さ v_0 で動き続けることがわかる．磁場 B_y が一様ならば運動はもちろん円運動だが，今の磁場の強さは z 軸からの距離 x に反比例するので，加速度の大きさは z 軸に近づくほど大きくなる．その結果荷電粒子は，図 S186 に示すように，回転をしながら（$Q > 0$ の場合は）$+z$ 方向にずれていくことが予想できる．このような運動をドリフトという．

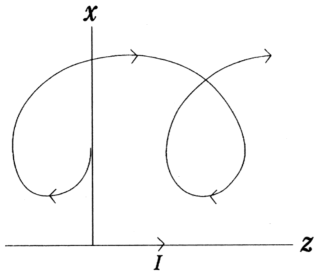


図 S186

2)　本文の結果は，座標系の変換の代わりに，正準運動量の保存則を用いて導くこともできる．電流だけみると，この系は z 方向への平行移動に対して不変だが，ローレンツ力に z 成分があるので，ふつうの運動量の z 成分 mv_z は保存しない（それは図 S186 からも明らか）．その代わりにこのような場合，正準運動量の z 成分

$$P_z = mv_z + QA_z$$

が保存することが知られている．ここで $\mathbf{A}$ は電流がつくる磁場のベクトルポテンシャルで，

$$A_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln r \equiv -k\ln r$$

ととればよい（r は z 軸からの距離）．粒子の出発点では $r = r_0$，$v_z = 0$，z 軸にもっとも近づく点では $r = r_{\min}$，$v_z = -v_0$，z 軸からもっとも遠ざかる点では $r = r_{\max}$，$v_z = v_0$ に注意して，この 3 点における P_z を等置すると，

$$-k\ln r_0 = -mv_0 - k\ln r_{\min} = mv_0 - k\ln r_{\max}$$

これから直ちに

$$\frac{r_0}{r_{\min}} = \frac{r_{\max}}{r_0} \qquad \text{および} \qquad v_0 = \frac{k}{m}\ln\frac{r_0}{r_{\min}}$$

が得られる．

S187　電場 $\mathbf{E}$，磁場 $\mathbf{B}$ の中で速度 $\mathbf{v}$ で動く，電荷 Q をもつ小さな物体には，ローレンツ力

$$\mathbf{F} = Q\,(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

が働く．元の座標系に対して速度 $\mathbf{v}_0$ で動く座標系では，粒子の速度は $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0$ である．新しい座標系での物理量には，すべてプライム（ダッシュ）をつけることにすれば，ローレンツ力の式は

$$\mathbf{F}' = Q'(\mathbf{E}' + \mathbf{v}' \times \mathbf{B}')$$

となる．ここで二つの座標系を比べる．粒子に働くどんな力も，それが（たとえば力がつくる加速度によって）観測可能なものならば，座標系によって変わることはできない．すなわち $\mathbf{F}' = \mathbf{F}$ である．同じことは電荷についても成り立つ：$Q' = Q$.（粒子の電荷が速度に依存するとしたら，はじめは電気的に中性であった物体が，熱するとゼロでない全電荷を示すことになるだろう．自然界にそんな形跡はない.）

$\mathbf{F}' = \mathbf{F}$ に速度の変換則を代入すれば

$$Q\,(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = Q\,(\mathbf{E}' - \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}' + \mathbf{v} \times \mathbf{B}')$$

がでる．この関係は，任意の $\mathbf{v}$ に対して（したがってとくに静止粒子に対しても）成り立たねばならないから，

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} \qquad \text{これより} \qquad \mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}$$

という関係が得られる．こうして，電場と磁場は無関係な物理量ではなく，その値は，現象を記述するのに用いる座標系（の速度）に依存することがわかる（P184 も参照）．この一般的な関係を，今の問題に（2 回）適用する．

流体（に固定した）座標系を考える．コンデンサー系からこの系に移るには，$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}$ の変換がいる．この新しい系でも磁場は $\mathbf{B}' = \mathbf{B}$ と変わらないが，そのほかにこの系では，強さ $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ の電場 $\mathbf{E}'$ もある（流体がない場合）．静止した流体はこの場で分極され，その結果電場は $1/\varepsilon_\mathrm{r}$ に減って $\mathbf{E}' = \mathbf{v} \times \mathbf{B}/\varepsilon_\mathrm{r}$ にな

る．はじめの（コンデンサー）座標系に戻るにはもう一度変換がいるが，今度は $\mathbf{v}_0$ は $-\mathbf{v}$ である．ふたたび磁場は変わらず $\mathbf{B}'' = \mathbf{B}' = \mathbf{B}$ であるが，電場は

$$\mathbf{E}'' = \mathbf{E}' - \mathbf{v} \times \mathbf{B}' = \mathbf{v} \times \mathbf{B}/\varepsilon_{\mathrm{r}} - \mathbf{v} \times \mathbf{B} = -\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_{\mathrm{r}}}\right) \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

で与えられる．その結果，極板の間に電位差

$$V = vBd\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_{\mathrm{r}}}\right)$$

が現れる．

分極しない物質（$\varepsilon_{\mathrm{r}} = 1$）に対しては，この電圧は明らかにゼロである．一方非常に分極しやすい物質（金属）に対しては，$V = vBd$ である．この後者の式はホール効果を表していて，次のように解釈できる．磁場中を動く導体中の電荷は，ローレンツ力を受けて移動する．横方向の電荷の移動は，（磁場に比例する）ローレンツ力を打ち消す静電場が出来上がるまで続く．そのための条件 $QE = QvB$ から，上の関係 $V = Ed = vBd$ が再現される．

訳注　1）上の結果は，座標系の変換を用いずに得ることもできる．磁場 B 中を速度 v で流れる流体中の単位電荷には，ローレンツの力 vB が働く．これは電場 $E_B = vB$ があるのと同じで，誘電体の流体は分極し，流体の表面に分極電荷が現れる．この分極電荷が誘電体中につくる電場を E_P とすると，E_P は E_B と反対向きだから，$E_B - E_P$ が‘全電場’に相当し，これは分極がないときの‘電場’E_B を $1/\varepsilon_{\mathrm{r}}$ に弱めたものである．すなわち $E_B - E_P = E_B/\varepsilon_{\mathrm{r}}$ で，これから

$$E_P = (1 - \varepsilon_{\mathrm{r}}^{-1})\, E_B = (1 - \varepsilon_{\mathrm{r}}^{-1})\, vB$$

が決まる．流体中の真の電場は E_P だけだから，流体の両側表面の間の電位差は $V = E_P d$ である．

2）上の電位差が，極板間に接続した電圧計で読み取られる機構を説明しておく．極板の内側表面は流体の表面と向かい合うので，静電誘導により，分極電荷と反対符号の電荷が分布する．その結果，極板の外側表面には，分極電荷と同じ電荷分布が現れる．これはファラデー・ケージの原理にほかならない．極板間に電圧計をつなぐと，極板の外側表面の電荷が電圧計を通して放電するが，内部抵抗 R が非常に大きな電圧計を用いれば，放電電流 I は非常に小さく，積 RI は極板間の電位差に等しい一定値を示すのである．

S188　ある過程を量子力学で記述するとき，過程のいろいろな段階が，一定の時間順序で起こるという言い方は正しくない．また，古典的には保存される量（過程を通じて常に一定に保たれる量）を，量子力学では，一時的に‘借りて’過程が進むことができるという言い方も正しくない．しかし，ある量を‘借りる’ということの意味を，借りる量が多いほど，その過程は起こりにくいというように解釈するならば，量子効果の‘古典的な’説明は，定性的には正しい説明を与えるのがふつうである．

ウラン原子核の体積は，核分裂生成物の体積の和に等しい．しかし核分裂生成物の全表面積は，はじめのウラン原子核の表面積よりも大きい．これは，過程が始まるときに，（結合）エネルギーの一時的な減少があることを意味する．これは分裂の過程が出発する際に‘信用借り’しなければならないエネルギーであり，後で分裂でできた原子核どうしが離れたときに，系のクーロンエネルギーの減少によって返済されるものである．もしウラン原子核が三つの核分裂生成物に割れるとすると，過程の出発点で必要になるエネルギーは，二つの場合に比べて非常に大きいので，理論，実際のどちらでも，そのような過程が起こる確率は，無視できるほど小さいのである．

S189　原子が数千度に熱せられていても，その熱エネルギーは，原子核の核子1個あたりの結合エネルギー（束縛エネルギー）より，はるかに小さい．この理由により，核反応が起こる速さは，ふつうは温度にはよらない．

しかしアイソトープ ^{7}Be は，K 捕獲（原子核が，原子の一番内側の K 殻から電子を1個とりこむ）によって ^{7}Li に変換する．数千度の温度では，熱エネルギーの量子である k_BT は，Be 原子の一番内側にいる2個の電子のイオン化エネルギーと同程度になる．（マクスウェル速度分布の末端を考えよ．）ベリリウム原子の一部がイオン化すると，原子核による電子捕獲が起こる確率は，ほぼ同じ割合だけ減少する．こうして数千度では，ベリリウムの放射能，したがって半減期が，影響を受けることが可能になる．

S190　放射平衡にある試料中では，アイソトープの含有量は半減期に比例する．10^{-3} kg のトリウム試料のほとんど全部は ^{232}Th だから，トリウム原子

の個数は

$$\frac{6.02\times10^{23}}{232}=2.595\times10^{21}$$

である．したがってラドン原子の個数は

$$2.595\times10^{21}\times\frac{56\,\mathrm{s}}{1.41\times10^{10}\,\mathrm{y}}\approx3.3\times10^{5}$$

である．

問題で指定された時間範囲では，トリウムの両方のアイソトープがラドンの個数に寄与する．どちらの寄与も，最初は時間とともに増加し，それから放射平衡で一定値を保ち，最後に減少する．最初の増加率は，途中の崩壊連鎖の中で一番おそい崩壊率によって決まり，最後の減少率は，親のトリウムの崩壊率で決まる．

すなわち ${}^{228}_{90}\mathrm{Th}$ からの寄与は，3.64 日の半減期で立ち上がり，1.91 年の半減期で減少する．同様に ${}^{232}_{90}\mathrm{Th}$ からの寄与は，5.7 年の半減期で立ち上がり，実質上無限大の半減期で減少する．存在する ${}^{220}_{86}\mathrm{Rn}$ の全数は，図 S190 に示すように，上の二つの寄与の和である．

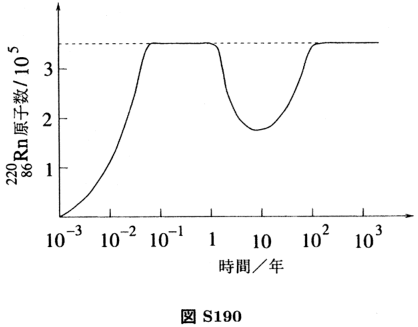


図 S190

曲線の最初の立ち上がりは，はじめの試料中に存在した ${}^{228}_{90}\mathrm{Th}$ からつくられたラドンによる．このラドンは，もとの ${}^{232}_{90}\mathrm{Th}$ からくるラドンがかなりの個数になる頃には，ほとんど崩壊してしまっている．約 8 年たつと，両方の祖先からくるラドンの個数が，ほぼ 0.9×10^{5} ずつで等しくなる．その後は，個数は

ふたたび増加して，平衡値の 3.3×10^5 に達する．この時点では，存在する原子の実質上全部が，${}^{232}_{90}\mathrm{Th}$ を祖先とするものである．この個数は，約 10^{10} 年の間一定である．

S191　（静止）質量 m，速度 v の粒子の相対論的なエネルギーと運動量は

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad \text{および} \qquad p = \frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

である（c は光の速度）．この 2 式から $E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$ という関係が得られる．

粒子と粒子の衝突の結果，陽子・反陽子対のような，衝突前にはなかった新しい粒子が余分に発生することがある．反陽子は陽子と同じ静止質量をもつ．衝突後に存在する粒子の全エネルギーが最低になるのは，この 4 粒子（3 個の陽子と 1 個の反陽子）がくっついて動くとき，すなわち 4 粒子の重心系では，どの粒子も速さがゼロのときである．この状態では，4 粒子は質量 $4m$ の 1 個の粒子と考えることができる．その運動量は，衝突前に加速された陽子がもつ運動量に等しい．エネルギーの保存則は

$$\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} + mc^2 = \sqrt{p^2c^2 + (4m)^2c^4}$$

と書ける．この式の両辺を 2 乗すれば，$p = \sqrt{48}\,mc$ および $E_\mathrm{p} = 7mc^2$ がでる．それゆえ加速によって，陽子は運動エネルギー $E_\mathrm{p} - mc^2 = 6mc^2 \approx 6\,\mathrm{GeV}$ を得る必要があり，それには加速電圧 $6 \times 10^9\,\mathrm{V}$ を要する．

S192　ファラデー・ケージの壁の中で電子（質量 m，電荷 e）は自由に動き，その結果，壁の中の電子に働く電気力と重力の合力がゼロの状態に達する．この状態が実現すると，金属の壁の底の部分に電子がわずかに集まり，天井の部分に余分な正電荷（電子の不足）が残る．この電荷の移動は，その結果できる鉛直方向の電場が $E_0 = mg/|e|$ になるまで続く．

ケージの壁の中に一様な電場ができると，ケージの内部自体にも同じ電場ができているはずである．なぜなら，もしそうでなければ，荷電粒子が壁の中を鉛直上方に（あるいは下方に）動き，引き続いてケージの内部を通ってもとの

位置に帰れば，それをもとにして永久機関がつくれるが，明らかにそれは不合理だからである．

こうして，壁の中の電荷移動の結果できる静電場は，ケージ内部に置いた電子に重力と同じ大きさの力を及ぼす．言い換えれば，ケージは重力場も遮蔽する！　しかしこの遮蔽は，電子に対してだけ成り立つ．電荷と質量の比 e/m が電子と異なる粒子に対しては，合力ゼロの条件は満たされない．たとえば陽電子の場合には，合力は $E_0|e| + mg = 2\,mg$ である．すなわち陽電子は，鉛直下方に加速度 $2\,g$ で動き始める．

数値的には，この静電場は $E_0 = 5.6 \times 10^{-11}\,\mathrm{V \cdot m^{-1}}$ で，これは非常に小さな値なので，上の現象はふつうの環境では見ることができない．電子を初速度ゼロでケージの内部に入れることはできない．なぜなら，電子をわずか 0.1 eV のエネルギーで金属から引き出す光電効果の場合でも，電子は $200\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$ の速度で走るからである．1 m 自由落下した後の速度の変化はそのわずか 10^{10} 分の 1 で，これは小さすぎて観測できない．

注　ここまでは，ケージの内部に陽電子があることによって生じる，壁の中の電荷の移動の効果は考えていない．この効果の大きさは，鏡像電荷の方法を用いて計算できる．壁から微小距離 d のところにいる電荷 e が金属中の分極電荷から受ける力は，その電荷から距離 $2\,d$ のところにいる電荷 $-e$（鏡像電荷）から受ける力

$$F_{\mathrm{image}} = k\,\frac{(-e)\,e}{(2\,d)^2}$$

と同じである．電子や陽電子の場合にはこの力は，$d \approx 2\,\mathrm{m}$ でこれらの粒子の重さと同程度になる．それゆえ本問の推論を実験データで証明しようとするなら，粒子が壁から数メートル以上離れることができるような，大きなファラデー・ケージをつくって実験をする必要がある．これより小さいと，調べているのはケージの遮蔽効果ではなく，壁の中の電荷の分極の効果だということになる．

S193　陽電子と陽子の質量をそれぞれ m と M で表し（$M \approx 2{,}000m$），電気素量（素電荷）を e で表す．質量の比が大きいため，陽電子は遠方に離れたが，陽子はほとんど動いていないような期間がある．最初の状態のエネルギーを，陽電子が 1 cm よりずっと遠くに離れ，速さ v_1 で走っている状態のエネル

ギーと等しいと置くと，

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{4}{a}+\frac{2}{\sqrt{2}\,a}\right)=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{2}\,a}+2\times\frac{1}{2}mv_1^2$$

と書ける．数値データを代入すれば $v_1 = 350\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ を得る．それ以後は，陽電子の速さはほとんど変わらない．

一方，陽子は，陽電子が近くにいる間はほとんど動かないが，斥力を及ぼしあっているので，結局は速さ v_2 まで加速される．ふたたびエネルギー保存則を適用すれば，

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{2}\,a}=2\times\frac{1}{2}Mv_2^2$$

で，これから $v_2 \approx 2.7\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ を得る．

S194 コンプトン散乱に対する，エネルギーと運動量の保存則の一般式は，

$$hf_0+m_0c^2=hf+mc^2$$
$$\frac{hf_0}{c}=\frac{hf}{c}\cos\alpha+p\cos\beta$$
$$\frac{hf}{c}\sin\alpha=p\sin\beta$$
$$(mc^2)^2=(m_0c^2)^2+p^2c^2$$

である．ここで f_0 と f はそれぞれ入射光子と散乱光子の振動数，α と β は光子と電子の散乱角，m_0 は電子の静止質量を表す．

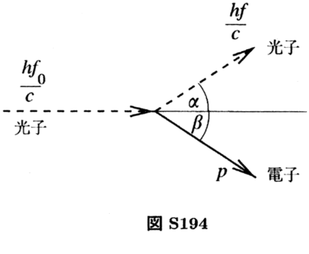


図 S194

今考えている特別の場合には，

$$hf_0=m_0c^2 \qquad \text{および} \qquad \frac{hf}{c}=p$$

の関係がある．これらの式を解いて，

$$\alpha = \beta = \cos^{-1}\frac{2}{3} \approx 48.2^\circ$$

がわかる．それゆえ散乱光子と反跳電子の間の角は $\alpha + \beta \approx 96.4^\circ$ である．散乱された電子の運動量は

$$p = \frac{3}{4}m_0 c = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

で，これから電子の速さが $v = \frac{3}{5}c$ とでる．これは c と同程度の大きさであり，したがって相対論的な式を用いるのが妥当である．

S195　振動数 f の光子のエネルギーは hf，運動量は hf/c である（h はプランク定数，c は光の速度）．衝突の後，光子のエネルギーは hf' に減り，運動量は大きさは hf'/c で，はじめの運動量と垂直である．

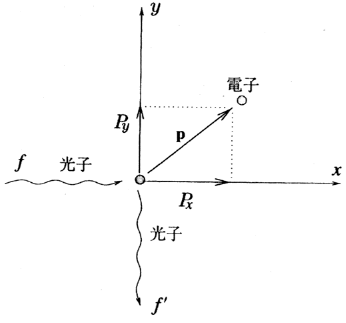


図 S195

運動量の保存則から，図 S195 に示すように，衝突後の電子の運動量の成分は $p_x = hf/c$，$p_y = hf'/c$ である．電子の静止質量エネルギーを E_0，エネルギーの相対論的な表式を E とおくと，$E^2 = E_0^2 + p^2c^2$ だから，エネルギー保存則から

$$hf + E_0 = hf' + \sqrt{E_0^2 + (p_x^2 + p_y^2)\,c^2}$$

を得る．この関係から，光子の波長の変化

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{c}{f'} - \frac{c}{f} = \frac{hc}{E_0} = \frac{h}{mc} \approx 2.4 \times 10^{-12}\,\mathrm{m}$$

が得られる．

注　上に現れた，自然定数（電子の質量，光の速さ，プランク定数）にだけ依存する長さの次元をもつ興味ある量は，電子のコンプトン波長と呼ばれる．

S196　球面コンデンサーのエネルギーの式を‘古典的電子’に適用すると，

$$\frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} < mc^2$$

を得る．これは

$$r > \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{2mc^2} = 1.4 \times 10^{-15}\,\mathrm{m}$$

と書き表すことができる．この値は古典電子半径と呼ばれる．

この半径をもつ，質量が一様に分布した球面を，古典的電子と考える．この球面は角速度 ω で回転し，剛体としての角運動量をもつとする．それゆえ $\frac{2}{5}mr^2\omega = h/(4\pi)$ である．これから，‘赤道（equator）の速さ’は $v_{\mathrm{eq}} = r\omega \approx 350\,c$ となる．この速さは，相対論的物理学における速さの上限，すなわち光の速さをはるかに超える．ローレンツとアブラハムは，量子論誕生以前の 1900 年代初期に，古典的電子モデルをつくったが，その最初の版は，上の理由により放棄を余儀なくされた．

一つの改訂版は，電子は半径 r の球面で，面上に帯電はしているが，球面は回転しないと考える．そして，電子が磁気モーメントをもつという実験事実を説明するために，球面内に磁気双極子を含むとする．球面の外部では，電場と磁場がつくるベクトル $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ の定数倍が，電磁気的な運動量の流れを表す．この流れは角運動量をもち，パラメーターをうまく選べば，測定値に等しくすることができる．

S197　電子は，箱の底近くの，厚さ H の層を占めると仮定する．そうすると，電子の鉛直方向の座標は精度 H でわかる．したがって電子の鉛直方向の運

動量の不確定は，少なくとも $\Delta p = \hbar/\Delta x = \hbar/H$ である．ここで $\hbar$ はプランク定数の $1/(2\pi)$ 倍である．この状況では，電子はポテンシャルエネルギー

$$E_{\text{potential}} = mgx_{\text{average}} \approx mg\,\frac{H}{2}$$

と，運動エネルギー

$$E_{\text{kinetic}} = \frac{\Delta p^2}{2m} \approx \frac{\hbar^2}{2mH^2}$$

をもつ．それゆえ全エネルギーは

$$E(H) = E_{\text{potential}} + E_{\text{kinetic}} = AH + B\,\frac{1}{H^2}$$

である（A と B は上の式から決まる定数）．もし H が小さければ，ポテンシャルエネルギーは低いが運動エネルギーが高い．逆に H が大きければ，運動エネルギーは低いがポテンシャルエネルギーが高い．したがって $E_{\text{potential}}$ と E_{kinetic} の大きさが同程度のところで，全エネルギーが最小になるだろう．微分計算を用いれば，最小になるところでの二つのエネルギーの比は $2:1$ であることが示せる．ここでは概算だけでよいので，二つのエネルギーの比を 1 とおくと

$$H \approx \left(\frac{\hbar^2}{m^2 g}\right)^{1/3} \approx 1\,\text{mm}$$

を得る．これは，ふつうのミクロの大きさと比べると，非常に大きな値である．この理由は，分子の束縛エネルギーや大きさを決める電磁相互作用と比べると，重力が非常に弱いからである．

S198　原子番号 Z の原子核が，電子を半径 r の球内に閉じ込めるとすれば，電子の静電エネルギーは $E_{\text{el}} \approx -kZe^2/r$，運動量は $\hbar/r$ と見積もることができる．$Z \gg 1$ ならば（すなわち重い原子核に対しては），強く束縛された電子の運動エネルギーは，相対論の公式を用いて

$$E_{\text{kin}} = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} - mc^2 \approx pc$$

と計算できる．ここで c は光の速度，$\hbar$ はプランクの定数を 2π で割ったものである．電子の全エネルギーは

$$E(r) = E_{\text{el}} + E_{\text{kin}} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r} + \frac{\hbar c}{r}$$

である．微細構造定数は近似的に $e^2/4\pi\varepsilon_0\hbar c \approx 1/137$ だから，r の値が小さいときの電子の全エネルギーは

$$E(r) = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}(137 - Z)\frac{1}{r}$$

である．(r の値が大きい場合には，小さな運動量に対する非相対論的な式を用いねばならないので，上の式は正しくない．)

上の式によれば，$Z > 137$ ならば，電子は原子核の中に落ちこむことになる．もっと正確にいえば，原子核という小さな体積の中に閉じ込められるだろう．137 という数字は，原子番号の臨界値（critical value）に対する近似値にすぎない．原子核の有限な大きさを考慮に入れた，もっと正確な計算をすると，Z_{crit} はほぼ 150～160 となる．

上の計算は，原子番号が 150 より大きい超ウラン元素をつくることができるとすれば，電子がその元素の原子核内に閉じ込められ得ることを示す．

S199 水の表面波の伝播速度は，水の表面張力 γ および密度 ρ，それに表面波の波長 λ に依存する．これらの量の単位は

$$[\gamma] = \frac{\text{N}}{\text{m}}, \qquad [\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \qquad [\lambda] = \text{m}$$

である．これらの量から速度の表式を導くには，γ と ρ は γ/ρ の組み合わせで入らねばならない．（さもないと，長さと時間だけを含む速度が，質量の単位にもよることになる．）しかし

$$\left[\frac{\gamma}{\rho}\right] = \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2}$$

だから，速さの次元をもたせるには，これをさらに波長で割って，平方根をとらねばならない．まとめれば，表面張力波の伝播速度が

$$v \sim \sqrt{\frac{\gamma}{\rho\lambda}} \sim \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

のように波長の平方根に反比例することが，次元解析から決まる．この関数形（および与えられたデータ）から，表面波の伝播速度は，波長が 10^{-8} cm 程度のとき，水中の音速の大きさに達すると結論できる．

表面波の伝播速度は音速を超えることはできないので（分子間で乱れが伝わる速さが，物質中より表面で速いことはあり得ない），波長がほぼ 10^{-8} cm より短い波は意味をもたない．実際これは，水分子の大きさの程度である！

S200　読者はシャンパンの泡の加速だけでなく，泡の大きさが大きくなるのにも気づいただろう．発泡性のシャンパンは二酸化炭素が過飽和の状態にあるので，泡が上昇する間に，周囲から連続的に気体が加わる．これが，泡が上昇する間に体積が増す理由である．同じ理由で，泡が上昇する間に，液体が泡に及ぼす浮力も増す．押し上げる力は泡の体積に比例するのに対し，引き戻す方向の粘性力は，これも増しはするが，泡の表面積に比例するだけである．その結果，上向きの合力は泡の大きさとともに増加する．しかし速さが増すと粘性力も大きくなるので，最後には，力がつり合った状態で泡は動く．

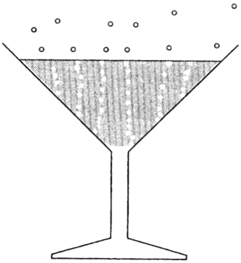


図 S200

訳者あとがき

本書は

Peter Gnädig, Gyula Honyek & Ken Riley :

200 Puzzling Physics Problems (Cambridge University Press, 2001)

の全訳である．表題の直訳は「考えさせる 200 の物理問題」というところだろう．本のねらいは「まえがき」に詳しく述べられている．幾何学との類推でいえば，機械的な計算に頼る解析幾何ではなく，補助線を一本引けば真相が明らかになる，初等幾何のような発想が重要な役割をする問題を集めてある．ハンガリーにおける物理のエリート教育の伝統を感じさせる，特徴のある書物である．

ほとんど全部の問題は古典物理学の分野のものだが，だからといって平易というわけではない．むしろ歯ごたえのある問題がそろっている．その代わり，解答は力を入れて書かれている．それを熟読してほしいというのが著者の意図であろう．

翻訳に際しいくつかの疑問点が生じたので，それを著者に知らせたところ，修正，加筆する部分の原稿が送られてきた．問題番号でいえば，それは

52，71，99，105，112，121

である．それ以外にも，気がついた誤植の類は訂正してある．

最後に，議論の相手になって下さった市村宗武氏に感謝したい．

2003 年 7 月

近 重 悠 一
伊 藤 郁 夫
加 藤 正 昭

○索　　引○

ア　行

カ　行

サ 行

タ　行

ナ　行

ハ 行

マ 行

ヤ 行

ラ 行

ワ　行

訳者紹介

近重悠一（ちかしげゆういち）　成蹊大学工学部教授・理学博士

伊藤郁夫（いとういくお）　成蹊大学工学部教授・理学博士

加藤正昭（かとうまさあき）　東京大学名誉教授・理学博士

楽しめる物理問題200選　　定価はカバーに表示

2003年9月1日　初版第1刷
2012年4月25日　第9刷

訳者　近重悠一
伊藤郁夫
加藤正昭

発行者　朝倉邦造

発行所　株式会社　朝倉書店

東京都新宿区新小川町6-29
郵便番号　162-8707
電話　03(3260)0141
FAX　03(3260)0180
http://www.asakura.co.jp

〈検印省略〉

東京書籍印刷・渡辺製本

ISBN 978-4-254-13091-1　C 3042　Printed in Japan